Übersicht

1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen (Vorlesung 1)

2. **Koordinatensysteme und -transformationen**

3. Räumliche Datenmodellierung

4. Vermaschungen

5. Räumliche Interpolation

6. Transformationen, Filtermethoden, Sonstiges

Raumbezug

Jedes Geoobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geoobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Raumbezug

Jedes Geoobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geoobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Direkter Raumbezug (primäre Metrik):

- Der Raumbezug über die Angabe zwei- oder dreidimensionalen Koordinaten hergestellt.
- Die Koordinaten beziehen sich auf ein bestimmtes Referenzsystem (*spatial reference*).
    - Lokal: Pixel-Koordinaten in Raster, Lokale Koordinaten relativ zu Referenzpunkt
    - Global: Koordinaten bzgl. Globalem Referenzsystem (UTM, Gauss-Krüger …)
- Distanzen zwischen Objekten können leicht berechnet werden.

Raumbezug

Jedes Geoobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geoobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Direkter Raumbezug (primäre Metrik):

- Der Raumbezug über die Angabe zwei- oder dreidimensionalen Koordinaten hergestellt.
- Die Koordinaten beziehen sich auf ein bestimmtes Referenzsystem (*spatial reference*).
    - Lokal: Pixel-Koordinaten in Raster, Lokale Koordinaten relativ zu Referenzpunkt
    - Global: Koordinaten bzgl. Globalem Referenzsystem (UTM, Gauss-Krüger …)
- Distanzen zwischen Objekten können leicht berechnet werden.

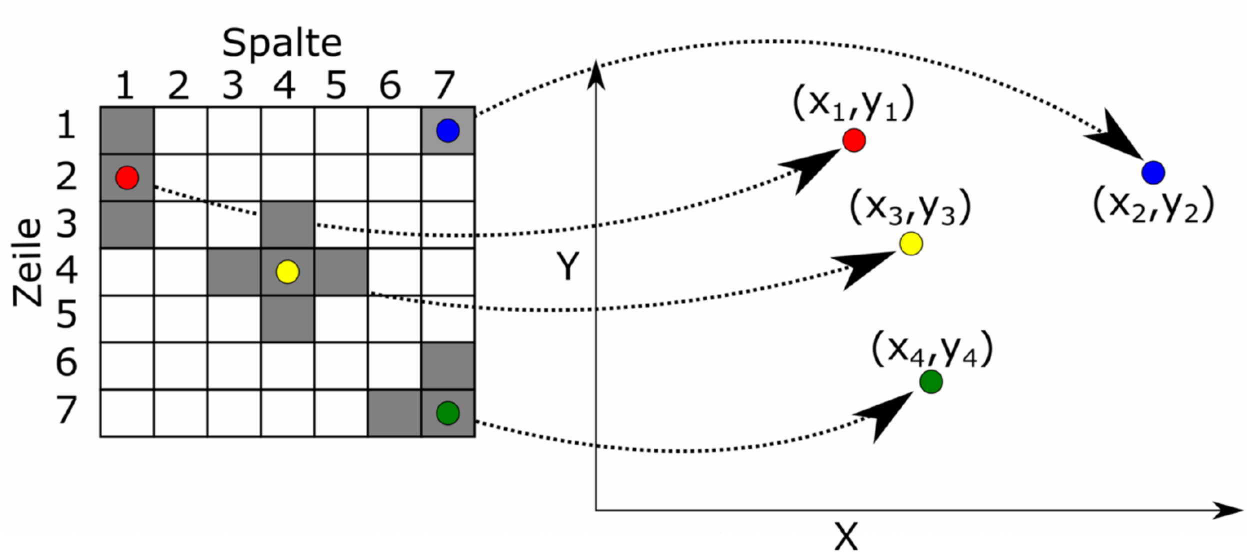
Indirekter Raumbezug (sekundäre Metrik):

- Raumbezug ist über qualitativen Größen angegeben, z.B.
    - Kennziffern (Postleitzahlen, Flurstücksnummern)
    - Namen von Orten / Gebieten
    - Adressen
    - …
- Distanzen zwischen Objekten können nur schwer berechnet werden
    - ➢ **Umwandlung in primäre Metrik!**

Georeferenzierung / Geokodierung

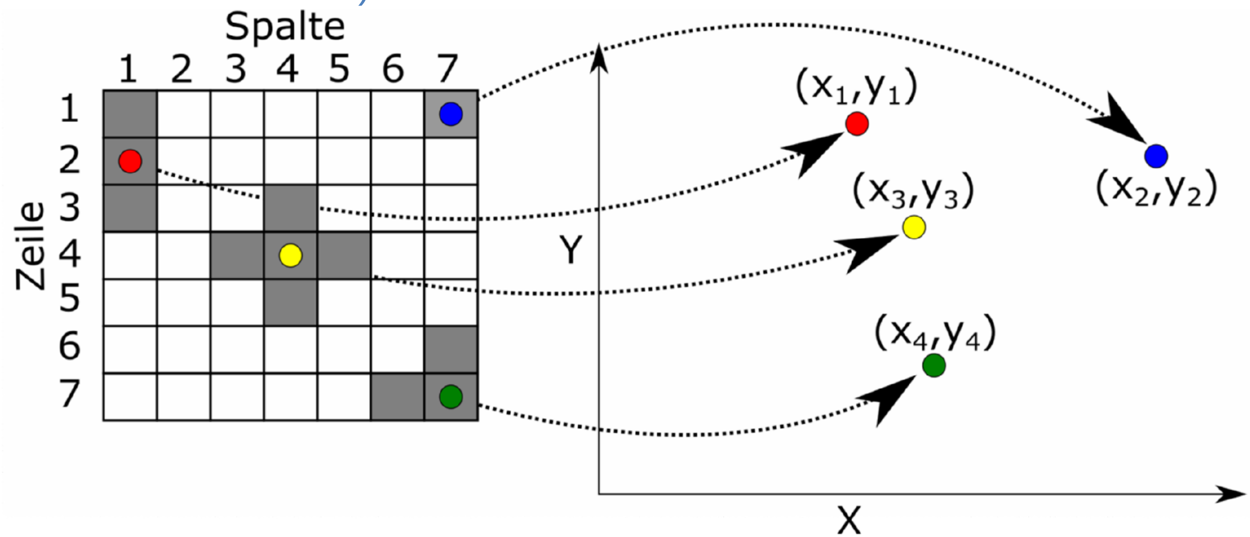
Im engeren Sinne bezeichnet **Georeferenzierung** die Zuweisung eines Raumbezuges zu einem Datensatz und **Geokodierung** die Überführung zwischen Koordinatensystemen.

Georeferenzierung umfasst (im weiteren Sinne; im ArcGIS-Kontext) den Workflow, welcher den externen Raumbezug der eigentlichen Daten in den Raumbezug des GIS-Projektes umwandelt. Es muss der externe Raumbezug (z.B. geographische Koordinaten (λ,φ) oder Pixel in einem Luftbild) in ein üblicherweise durch (x,y)-Koordinaten gegebenen Raumbezug des GIS Projektes (lokales Koordinatensystem).



Georeferenzierung / Geokodierung

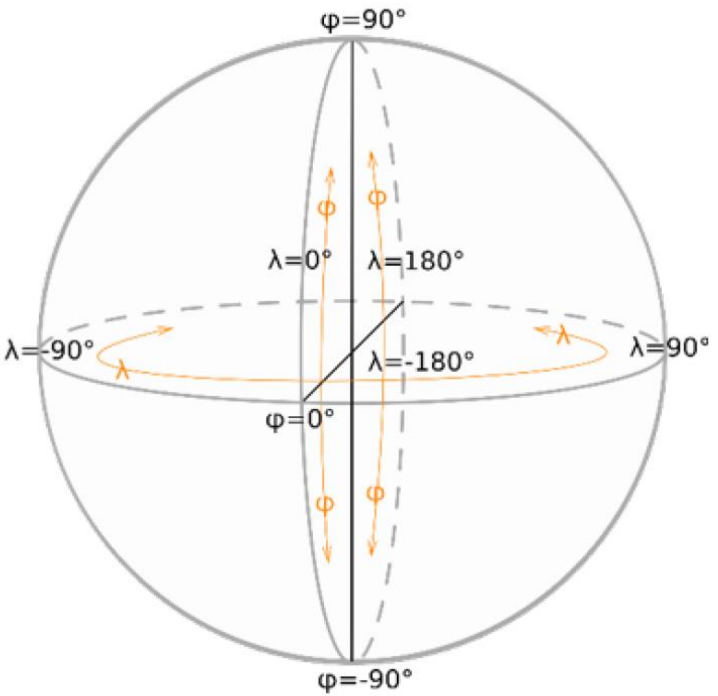
Eine der grundlegenden Aufgaben in einem GIS Projekt ist die Geokodierung, d.h. die Überführung des Raumbezuges aller Eingangsdatebsätze in den gemeinsamen Raumbezug des GIS-Projektes. Dies ist notwendig, um verschiedene Datensätze räumlich miteinander vergleichen und kombinieren zu können (z.B. Luftbildaufnahme, Topographische Karte, geochemische Punktdaten).



Ein **erstes Problem**: Wie bekomme ich die kugelförmige Erde auf die Ebene projiziert?

Kartenprojektion

- Jeder Punkt ím Raum kann durch 3 kartesische Koordinaten x,y,z gegeben werden
- Problem 1: eine Karte ist üblicherweise 2-D
- Problem 2: die Erde ist annähernd kugelförmig



Transformation zwischen sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) und kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\lambda) sin(\varphi) \\ r\, sin(\lambda)\, sin(\varphi) \\ r\, cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für r>0, 0≤λ<2π, und 0≤φ≤π.

Umwandlung der Einheiten in “Grad”:
-180°≤λ<180° und -90°≤φ≤90°.

Um es 2D darstellen zu können brauchen wir eine Referenzfläche.

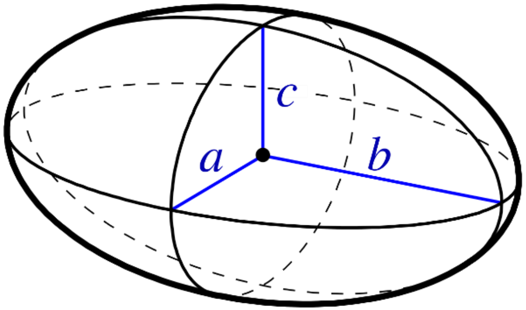
Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid**: $a = b; c$
  - Abplattung $f = \frac{a-c}{c}$
- Kugel: r=a=b=c (z.B. r=6371.2km)



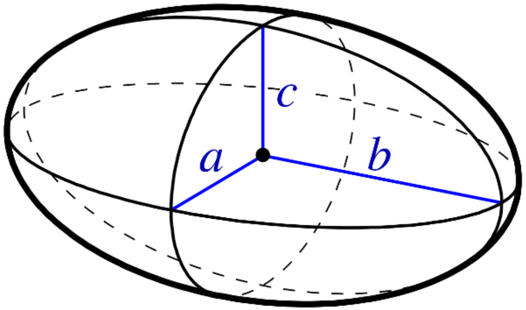
Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid**: $a = b; c$
  - Abplattung $f = \frac{a-c}{c}$
- Kugel: r=a=b=c (z.B. r=6371.2km)



Wichtige Referenzellipsoide sind z.B.

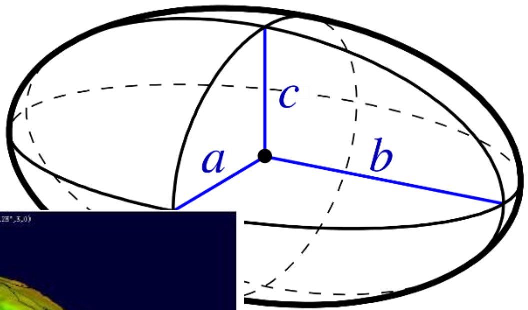
Name	a, b (in km)	c (in km)
WGS84 (1984, Nutzung für GPS)	6378.137	6356.752
Bessel (1841)	6377.379	6356.079
Hayford (1924)	6378.388	6356.912
Krassowskij (1940)	6378.245	6356.863

Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

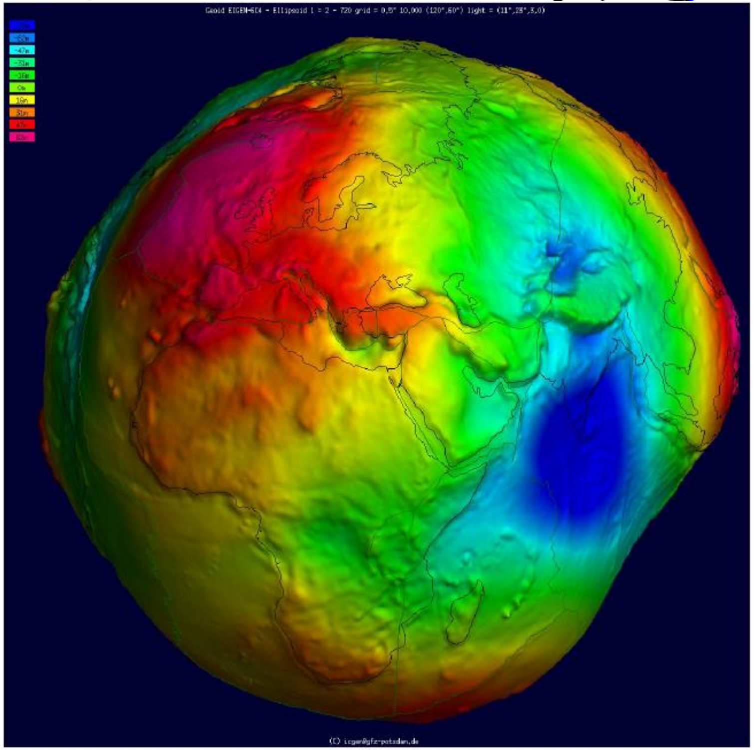
- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



- **Rotationsellipsoid:**
  - Abplattung f =
- Kugel: r=a=b=c (z.B

Wichtige Referenzellips



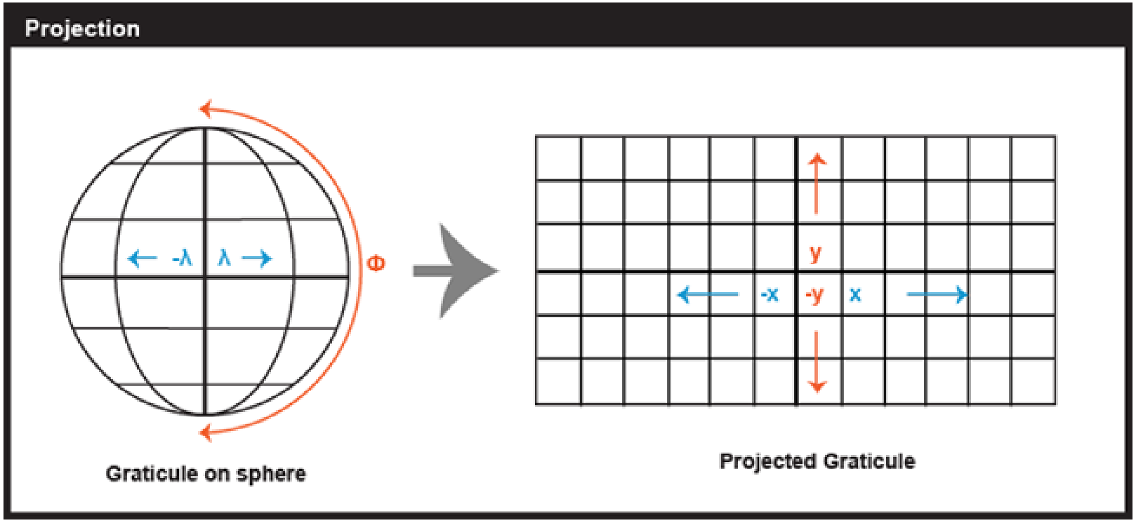
Name		c (in km)
WGS84 (1984, Nutzu		6356.752
Bessel (1841)		6356.079
Hayford (1924)		6356.912
Krassowskij (1940)		6356.863

- physikalische mot … che eines konstanten Gravitationspotentia…)

icgem.gfz-potsdam.de

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?



www.e-education.psu.edu/geog160/node/1918

Problem: Finde eine geeignete Abbildung

$T : \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}_r \to \mathbb{R}^2,$

oder alternativ $T : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,$

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- Flächentreu

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

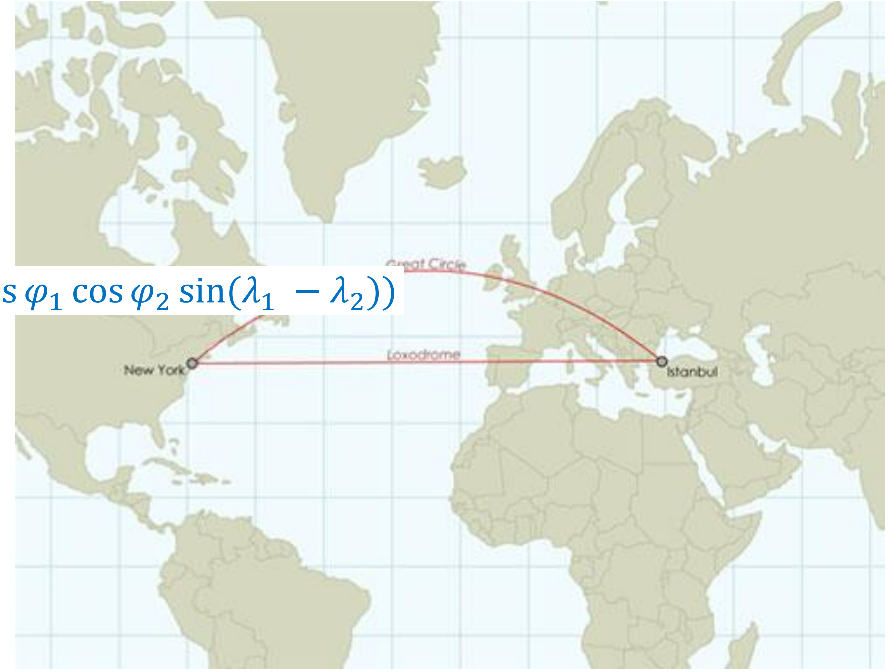
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

$$\mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r\arcsin(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\lambda_1 \ -\lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises



https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

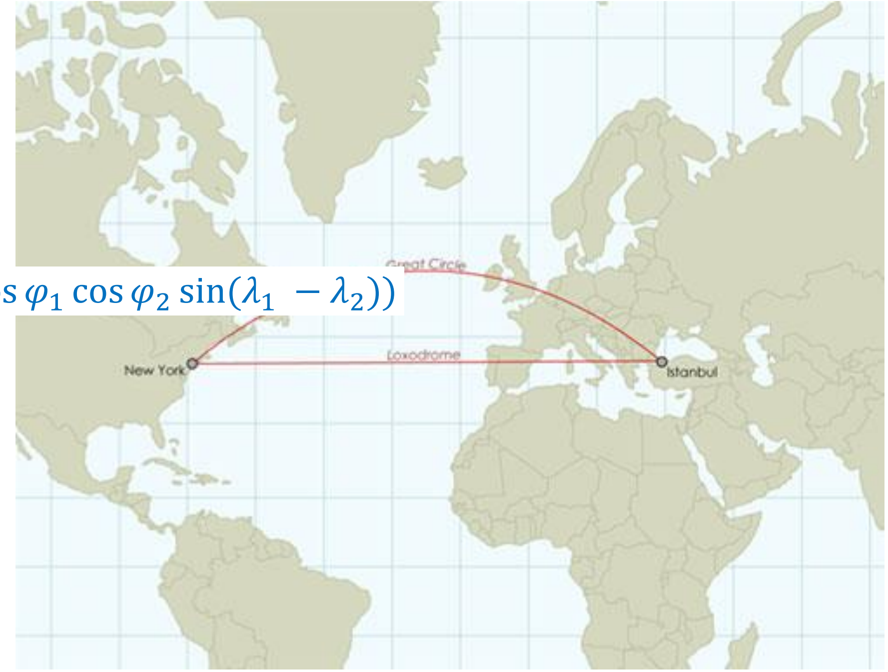
$$\mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r\arcsin(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises

Kürzeste Distanz auf euklidischer Ebene:

$$\mathrm{dist}_{eucl}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(Satz des Phytagoras)



https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Eine Projektion heißt *längentreu* (mit Maßstab α), falls

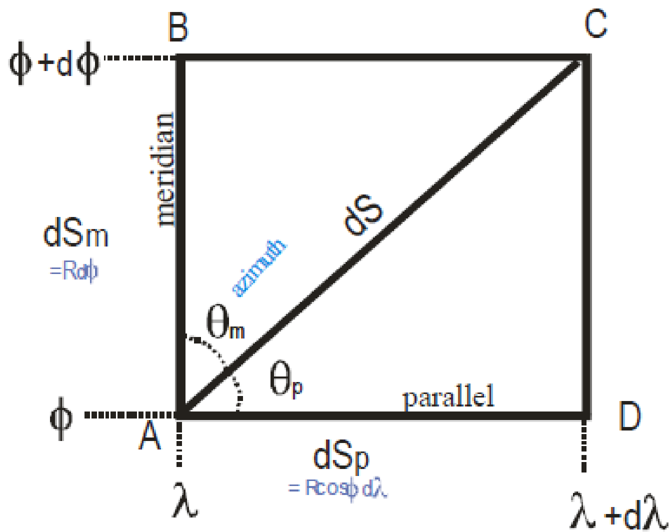
$$\mathrm{dist}_{eucl}(P_1, P_2) = \alpha \mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2)$$

Global längentreue Abbildungen **gibt es nicht**, aber Längentreue unter bestimmten Annahmen kann garantiert warden (z.B. von einem zentralen Punkt aus)

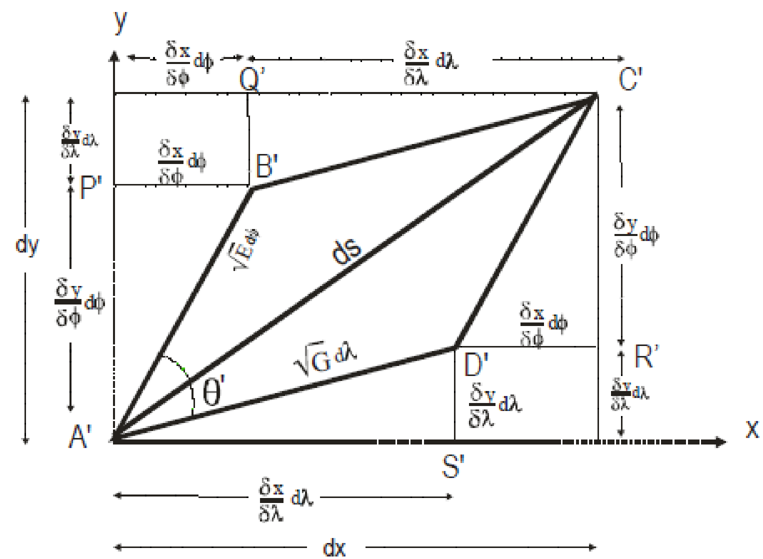
https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrössen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi\, d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E,F,G: Gaussche Fundamentalgrössen

Kartenprojektion

Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrössen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi\, d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E,F,G: Gaussche Fundamentalgrössen

Mit

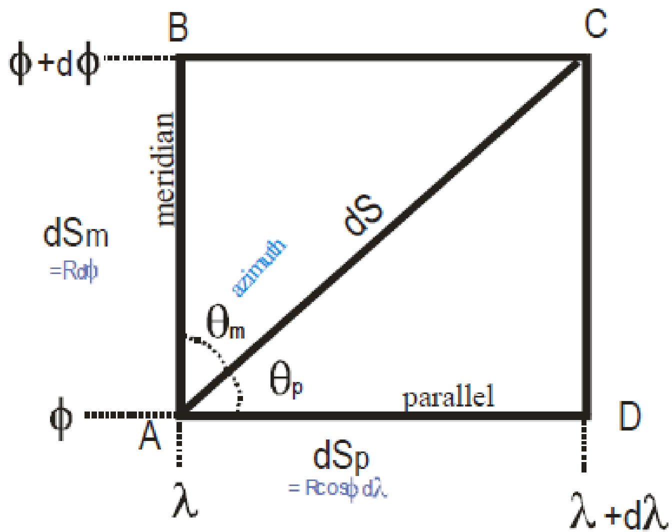
$$E(\,d\varphi\,)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2\right) d\varphi^2$$

$$G(\,d\lambda\,)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}\right)^2\right) d\lambda^2$$

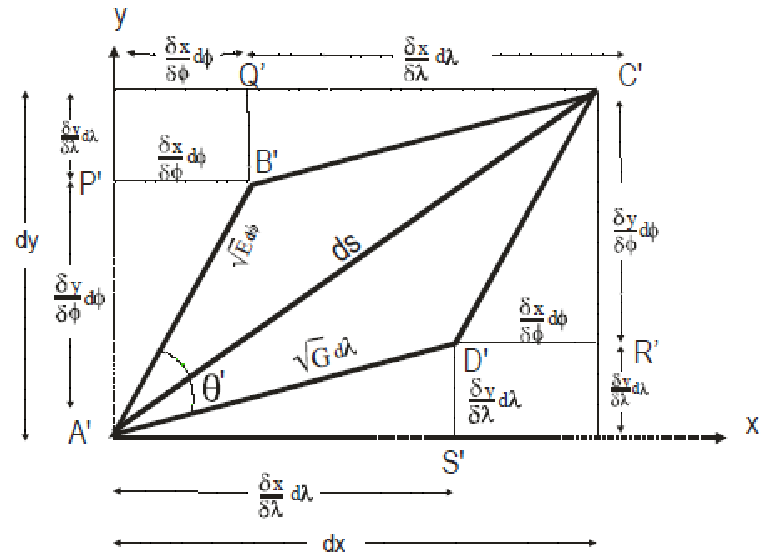
$$F(\,d\varphi d\lambda\,) = \left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)^2}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y(\lambda,\varphi)^2}{\partial \varphi \partial \lambda}\right) d\varphi d\lambda$$

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Skalen/Massstäbe:

$$\alpha_\lambda = \frac{A'D'}{AD} = \frac{\sqrt{G}}{r\cos(\varphi)}$$

$$\alpha_\varphi = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{E}}{r}$$

$$\alpha = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{E(d\varphi)^2+2F(d\varphi\, d\lambda)+G(d\lambda)^2}}{\sqrt{(d\varphi)^2+(\cos\varphi)^2(d\lambda)^2}}$$

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

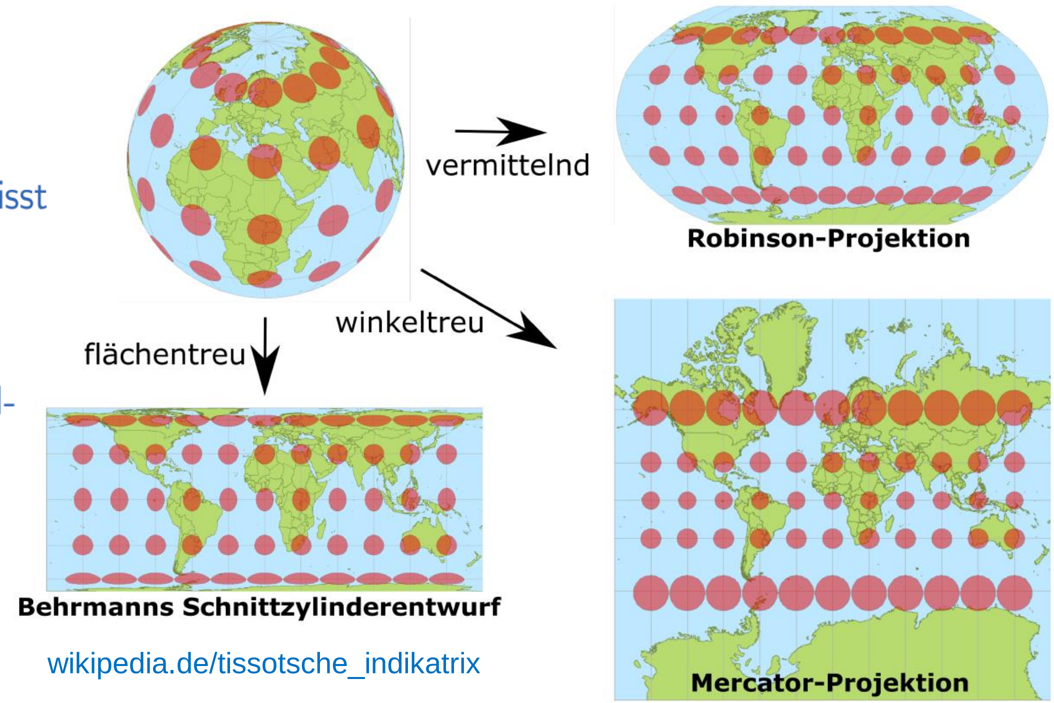
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- **Winkeltreu**
- Längentreu
- Flächentreu

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ heisst winkeltreu (konform), falls

$$\frac{\langle TP, TQ \rangle}{\|TP\| \|TQ\|} = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\| \|Q\|}$$

für alle P, Q aus dem Tangentialraum der Sphäre, und falls die Determinante von T positiv ist.



wikipedia.de/tissotsche_indikatrix

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

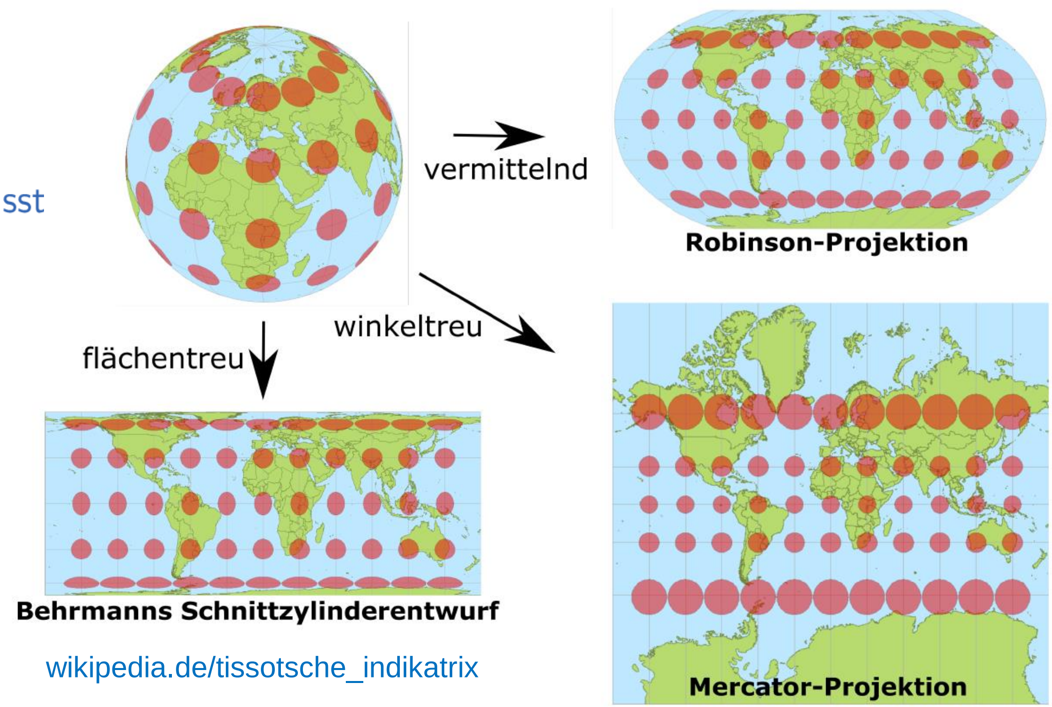
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- **Flächentreu**

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ heisst flächentreu, falls

$$\int_\Omega 1\, d\mu = \alpha \int_{T(\Omega)} 1\, d(x,y)$$

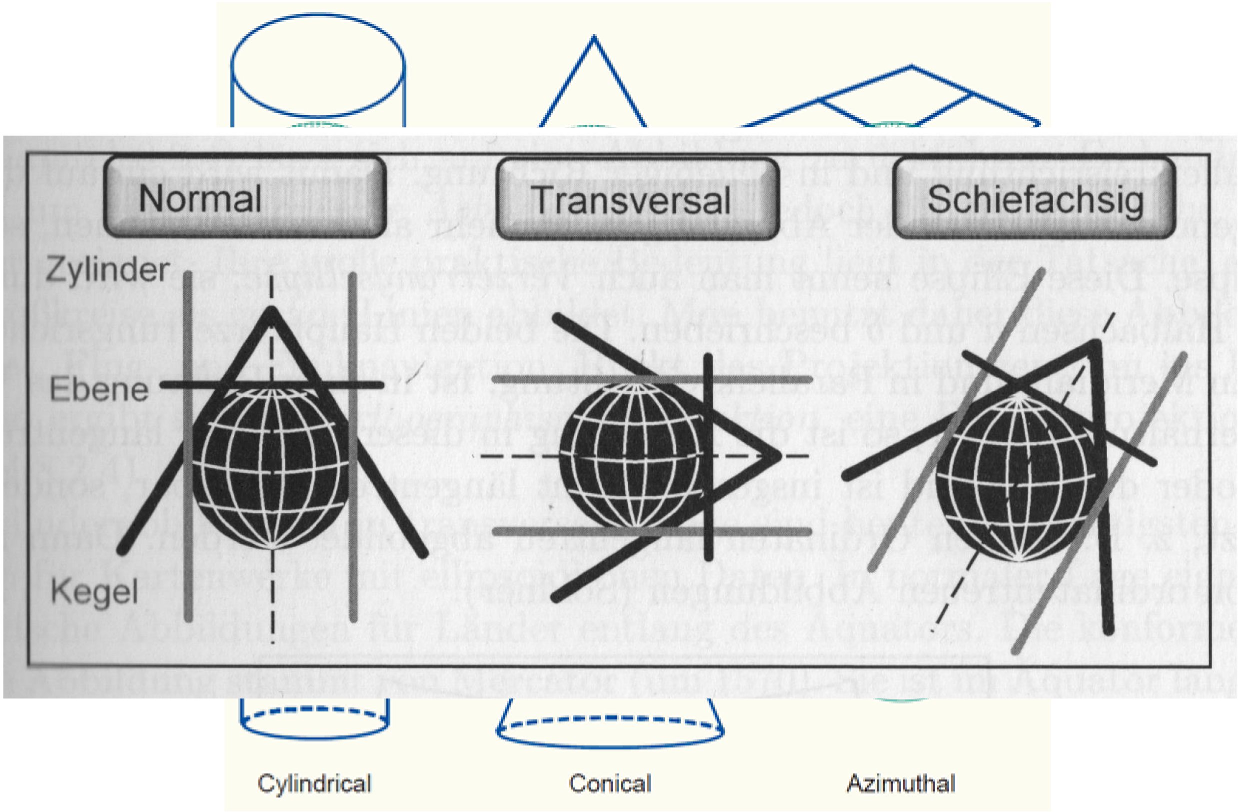
für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{S}_r$. Die Konstante α spiegelt dabei den Massstab wieder (Massstab sei hier als ein Skalierungsfaktor aufgefasst, nicht der umgangssprachliche Massstab).



wikipedia.de/tissotsche_indikatrix

Kartenprojektion

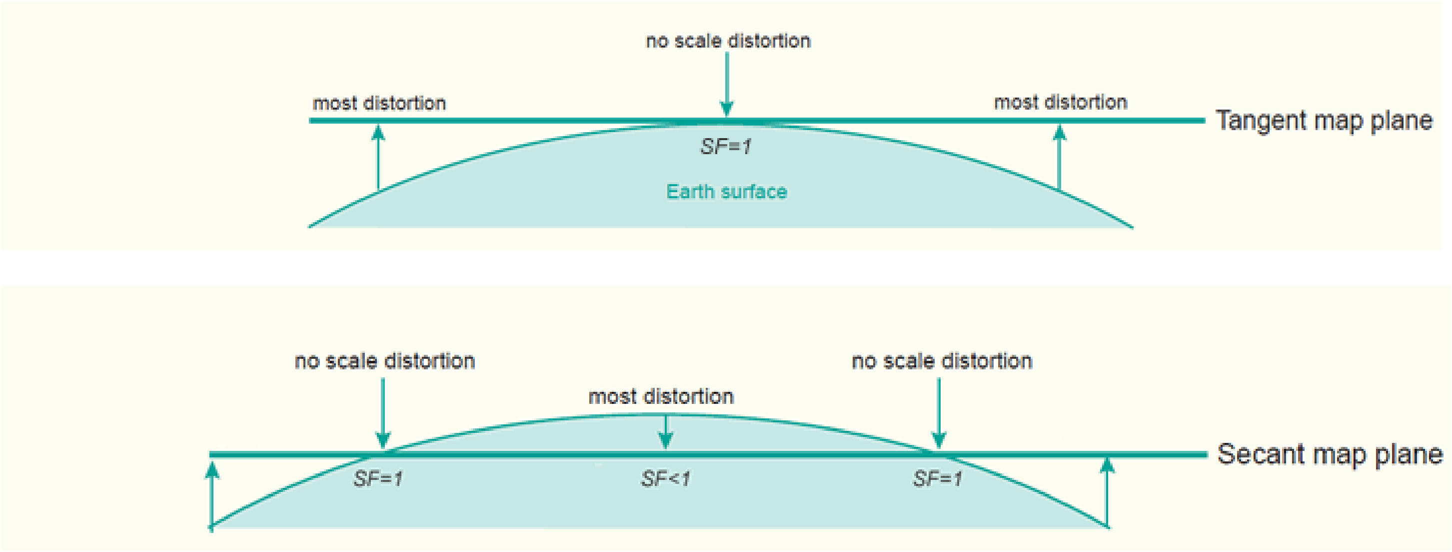
Man unterscheidet Kartenprojektionen basierend auf den Projektionsflächen



https://kartoweb.itc.nl

Kartenprojektion

Der Skalierungsfaktor beschreibt den Quotienten zwischen dem wahren Abstand zweier infinitesimal entfernten Punkte P und Q und dem Abstand der auf die Ebene projizierten Punkte TP und TQ.



https://kartoweb.itc.nl

Welche Projektionsebene würden Sie bevorzugen?

Kartenprojektion

Beispiele für winkeltreue Projektionen:

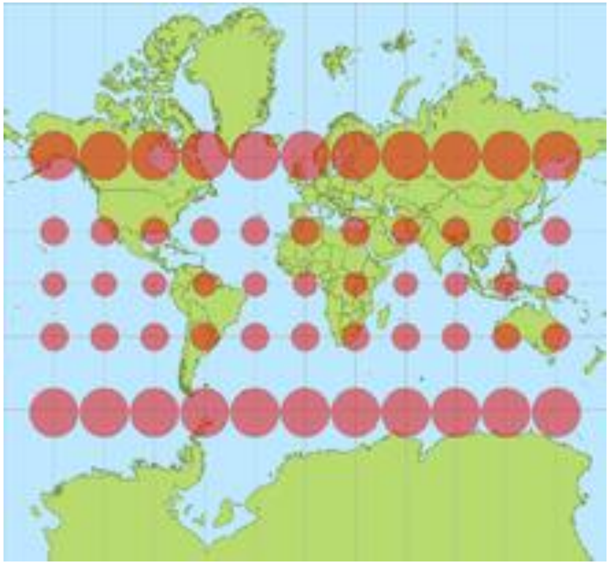
- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

  $$x = r(\lambda - \lambda_0)$$
  $$y = r \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

  Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

  $$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$
  $$\varphi = 2 \arctan\left(\exp\left(\frac{y}{r}\right)\right) - \frac{\pi}{2}$$



Kartenprojektion

Beispiele für winkeltreue Projektionen:

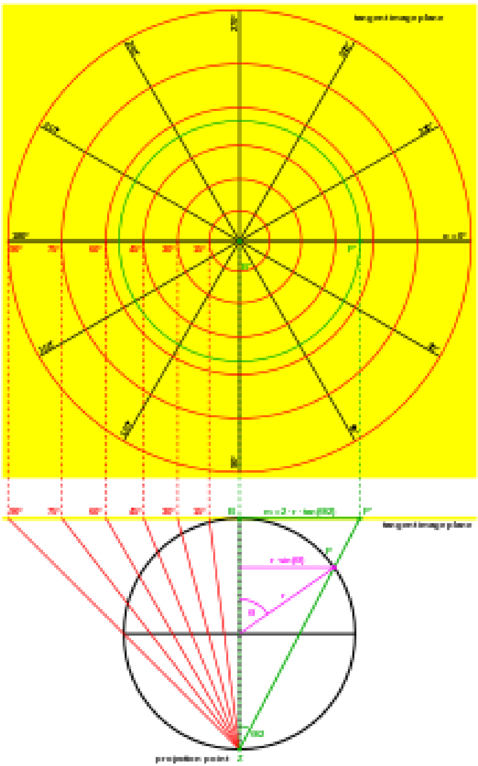
- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

  $$x = r(\lambda - \lambda_0)$$
  $$y = r \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

  Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

  $$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$
  $$\varphi = 2 \arctan\left(\exp\left(\frac{y}{r}\right)\right) - \frac{\pi}{2}$$



- **Stereographische Projektion** (azimuthale Projektion)

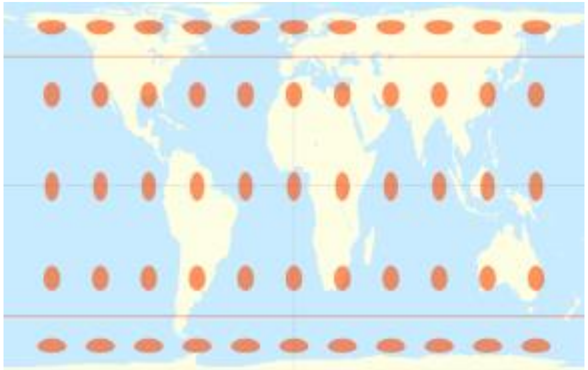
  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi) = s(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, wobei

  $$\alpha = \lambda$$
  $$s = 2r \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Kartenprojektion

Beispiele für flächentreue Projektionen:

https://map-projections.net/compare.php



- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

  $$x = r\lambda$$
  $$y = 2r\sin(\varphi)$$

Kartenprojektion

Beispiele für flächentreue Projektionen:

https://map-projections.net/compare.php

- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

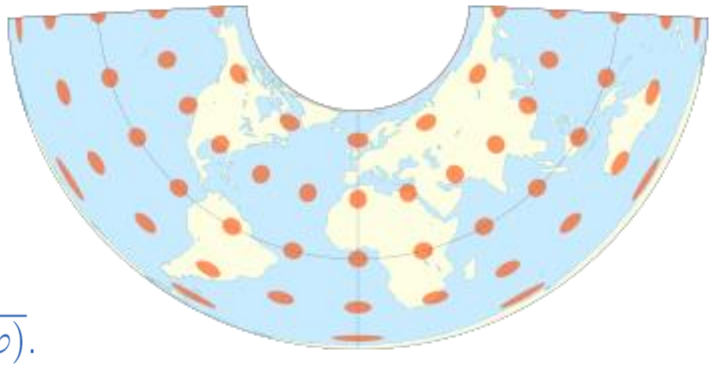
  $$x = r\lambda$$
  $$y = 2r\sin(\varphi)$$

- **Albers Kegelprojektion**

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$, sowie $\lambda_0, \varphi_1, \varphi_2$ Referenzlängen- bzw. -breitengrade:

  $$x = \rho\sin(\theta)$$
  $$y = \rho_0 - \rho\cos(\theta),$$

  wobei $\theta = \beta(\lambda - \lambda_0)$, $\beta = \frac{1}{2}(\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))$,
  $\gamma = \cos^2(\varphi_1) + 2\beta\sin(\varphi_1)$, und $\rho = \frac{r}{\beta}\sqrt{\gamma - 2\beta\sin(\varphi)}$.

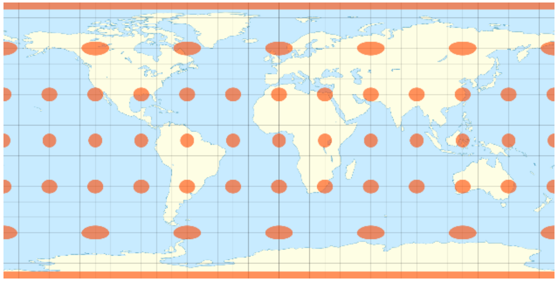


Kartenprojektion

Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

- **Quadratischde Plattkarte**: längentreu entlang der Meridiane
  - Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
  - Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
  - Transformation:

$$x = (\lambda - \lambda_0)\cos\varphi_1$$
$$y = \varphi - \varphi_1$$



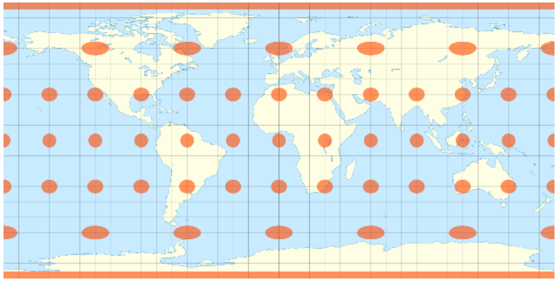
https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte

Kartenprojektion

Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

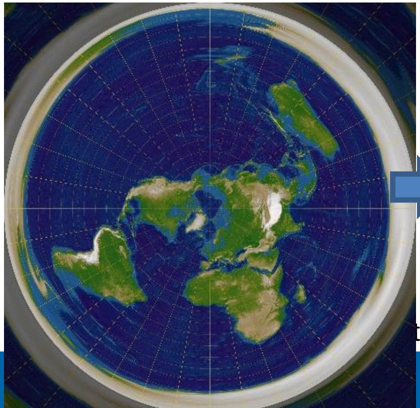
- **Quadratischde Plattkarte**: längentreu entlang der Meridiane
  - Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
  - Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
  - Transformation:

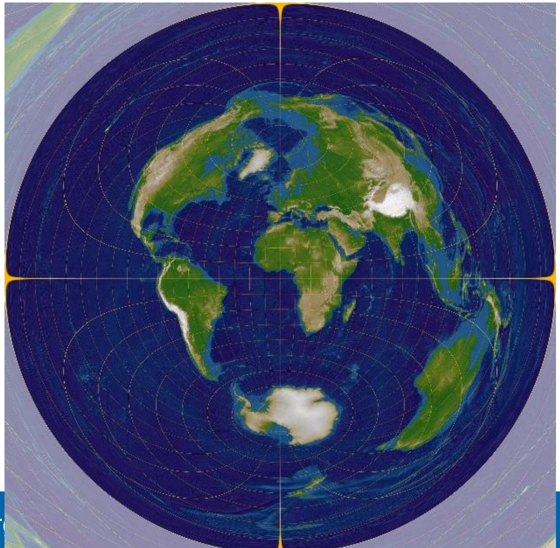
$$x = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_1$$
$$y = \varphi - \varphi_1$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte

- **Mittelabstandstreue Azimutalprojektion:** längentreu von zentralem Punkt aus



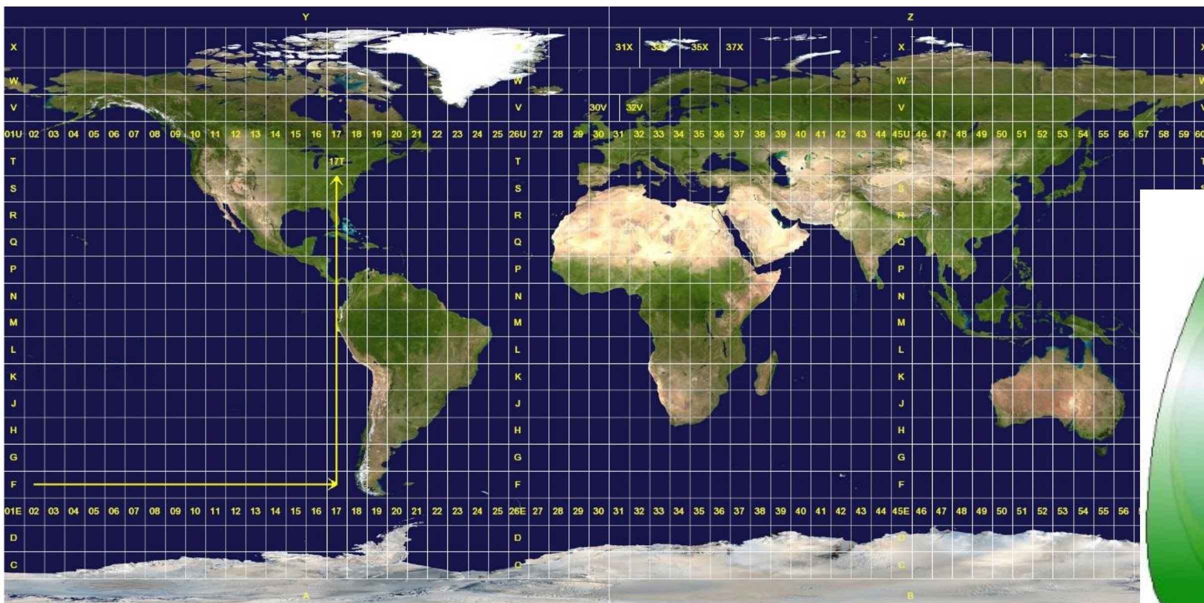


ttabstandstreue_Azimutalprojektion

Kartenprojektion

Sehr häufig verwendet: **UTM (Universal Transverse Mercator)**, Skalierungsfaktor α>0.9996

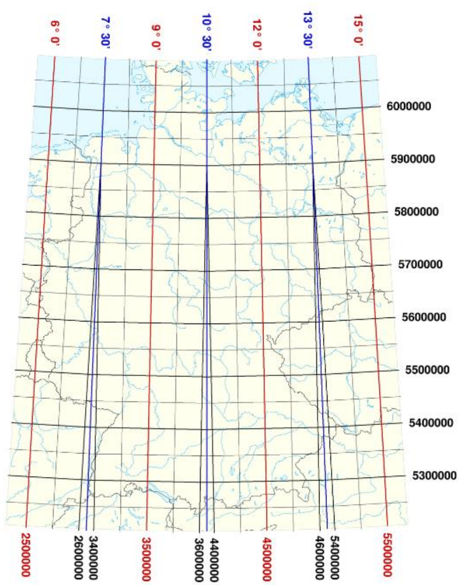
- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 6° Breite
- Jede Zone nutzt eine transversale Mercator Schittzylinderprojektion
- Referenzellipsoid ist GRS80 (nicht die Kugeloberfläche, wie bei den vorher angegebenen Tranformationsformeln)



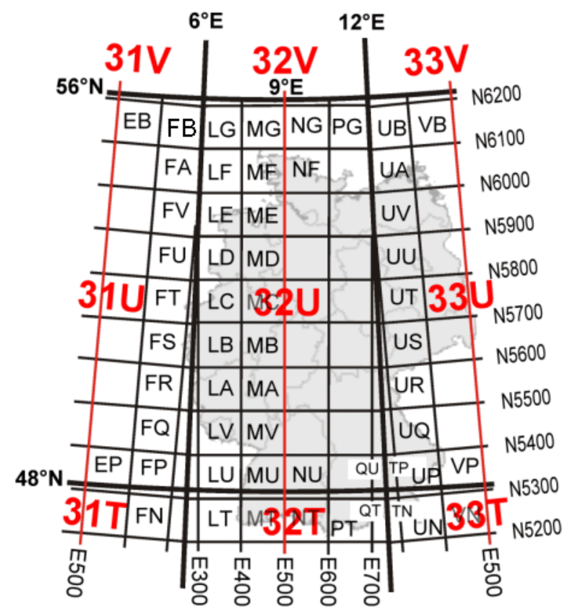
Kartenprojektion

Ebenfalls sehr häufig verwendet: **Gauss-Krüger**; nutzt ebenfalls transversale Mercator Projektion; Unterschiede zu UTM**:**

- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 3° Breite
- Referenzellipsoid ist Bessel



Gauss-Krüger



UTM