

Themenblock 3

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Führen Sie das System von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) + 2 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) &= e^t \\ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) - y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

von jeweils erster Ordnung in den gesuchten Funktionen

$$t \mapsto x(t), \quad t \in D \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad t \mapsto y(t), \quad t \in D$$

in eine Differentialgleichung einer Funktion von maximal 2-ter Ordnung über und ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten Verfahrens die allgemeinen Lösungen der folgenden Systeme von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = 4 \cdot y_1(x) + 12 \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = 1 \cdot y_1(x) + 5 \cdot y_2(x) \end{array} \right\} & \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) - y(t) + z(t) = 0 \\ \dot{y}(t) + 2 \cdot x(t) - z(t) = 0 \\ \dot{z}(t) - 2 \cdot x(t) + y(t) = 0 \end{array} \right\} \\ \text{(c)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = 2 \cdot y_1(x) + 4 \cdot y_2(x) + \cos x \\ y_2'(x) = \sin x - y_1(x) - 2 \cdot y_2(x) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Zwei Punktmassen m_1 und m_2 befinden sich an den Stellen O_1 und O_2 ($O_1 < O_2$) einer Zahlengeraden in Ruhe und sind durch eine entspannte Feder (Federkonstante $c > 0$) verbunden.

Zur Zeit $t = 0$ erfährt alleinig die Punktmasse m_1 eine Anfangsgeschwindigkeit in Richtung der Zahlengeraden.

Stellen Sie ein System von Differentialgleichungen mit Anfangswertbedingungen auf, dessen Lösung die Bewegungen (d.h. zeitliche Lagen) $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Massen m_1 und m_2 beschreibt.

Aufgabe 4:

Die Berechnung von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$u_{yy} + (2 - x) \cdot u_y - 2x \cdot u = 1 \quad (2)$$

$$u_{xyy} - u_x = y \quad (3)$$

in der gesuchten Funktion

$$(x, y) \mapsto u, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

lässt sich jeweils auf die Berechnung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen.

Berechnen Sie die jeweils alle Lösungen dieser Differentialgleichungen.

Aufgabe 5:

Gegeben ist die fastlineare partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$x \cdot u_{xx} + 2y \cdot u_{xy} + u_{yy} + (u_y)^2 - u \cdot u_x = 0 \quad (4)$$

in der gesuchten Funktion

$$(x, y) \mapsto u = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $(x, y) \in D$, an welchen Stellen die Differentialgleichung (4) vom elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Typ ist.

Skizzieren Sie in der xy -Ebene jene Bereiche, in welchen die Differentialgleichung (4) vom jeweiligen Typ ist.

Aufgabe 6:

Gegeben ist die elliptische Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (5)$$

in der gesuchten Funktion

$$(x, y) \mapsto u \quad \text{mit} \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Berechnen Sie mithilfe des Exponentialansatzes

$$(x, y) \mapsto u = \exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)$$

für zu bestimmende Koeffizienten α und β reellwertige Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aufgabe 7:

Gegeben ist das Anfangswertproblem zur Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 2 \cdot u_{xx} + xt, \quad u(0, x) = 1 \quad (6)$$

in der gesuchten Funktion

$$(t, x) \mapsto u = f(t, x) \quad \text{mit} \quad (t, x) \in D$$

Lösen Sie auf dem Gebiet $[0, T] \times [0, \pi] \subset D$ mit den homogenen Bedingungen

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$$

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 8:

Gegeben ist das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x + y + 3t \\ \dot{y} &= -2x + y + e^{-t}\end{aligned}\tag{7}$$

in den gesuchten reellen Funktionen $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$, worin \dot{x} und \dot{y} deren erste Ableitungen nach der reellen Variablen t bezeichnen.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Systems (7) mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}y_1'' + y_1' + y_2'' - y_2 &= e^x \\ y_1'' + 2 \cdot y_1' - y_1 - y_2'' + y_2' &= -e^{-x}\end{aligned}\tag{8}$$

in den Funktionen $x \mapsto y_1(x)$ und $x \mapsto y_2(x)$ mit $x \in D$.

- (a) Führen Sie das System (8) in eine Differentialgleichung von max. 4. Ordnung über und berechnen Sie deren allgemeine Lösung.
- (b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (8).

Aufgabe 10:

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$v_{rr} + \frac{1}{r} \cdot v_r + \frac{1}{r^2} \cdot v_{\theta\theta} + v_{zz} = 0\tag{9}$$

in der gesuchten Funktion

$$(r, \theta, z) \mapsto v = f(r, \theta, z) \quad \text{mit} \quad (r, \theta, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in Formelzeile (9) aus der Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

durch Transformation in Zylinderkoordinaten

$$u(x, y, z) = v(r, \theta, z) \quad \text{mit} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{und} \quad z = z$$

erhalten werden kann.

- (b) Berechnen Sie mithilfe des Separationsverfahrens reellwertige Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aufgabe 11:

Gegeben ist die hyperbolische Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0 \quad (10)$$

in der gesuchten Funktion

$$(x, y, z) \mapsto u \quad \text{mit} \quad (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$$

Berechnen Sie mithilfe des Exponentialansatzes

$$(x, y, z) \mapsto u = \exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z)$$

für zu bestimmende Koeffizienten α , β und γ reellwertige Lösungen dieser Differentialgleichung.