

# Belegaufgaben Teil 1: Lineare Tomographie

Inverse Probleme in der Geophysik, TU Bergakademie Freiberg

June 15, 2020

Fertigen Sie ein Jupyter Notebook an:

- Gliedern Sie es nach den unten stehenden Teilen
- Schreiben Sie die Fragen bzw. Aufgaben auf und beantworten Sie diese darunter.
- Austausch beim Code ist sehr sinnvoll, aber bitte kein Copy/Paste.
- Laden Sie das fertige Notebook ins OPAL hoch.

## A) Theorie

1. Stellen Sie die Singulärwertzerlegung einer Matrix dar!
2. Wie berechnet sich die verallgemeinerte Inverse bei einer abgeschnittenen SVD?
3. Wie muss bei der Inversion synthetischer Modelle der Pseudorang gewählt werden?
4. Wie berechnet man das Modell für Occam (Smoothness-constrained) Inversion?
5. Wie berechnet man Modellauflösungsmatrix und Informationsdichtematrix für beide Ansätze? Was kann man aus diesen ablesen?

## B Programmierung von Hilfsmitteln

1. Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung des chi-Quadrat-Werts für gegebene Daten, Modellantwort und Fehler

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum \left( \frac{d_i - f_i(\mathbf{m})}{\epsilon_i} \right)^2$$

2. Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung der Ableitungsmatrix (Vorlage JNB im Teil 7), führen Sie dabei eine optionale Wichtung der vertikalen Ableitung ein.

3. Schreiben Sie eine Funktion  $\text{TSVD}(sv, p, d)$  zur Berechnung eines Modells auf Basis der SVD.
4. Schreiben Sie eine Funktion  $\text{Occam}(G, C, \text{lambda}, d)$  zu Modell-Berechnung für Smoothness constraints.
5. Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung der Geschwindigkeit  $v$  für die Zeitmittel-Gleichung (Wyllie-Modell) in Abhängigkeit von Porosität  $\Phi$  und Sättigung  $S$ :

$$\frac{1}{v} = (1 - \phi) \frac{1}{v_m} + \phi S \frac{1}{v_w} + \phi(1 - S) \frac{1}{v_a}$$

Dabei bezeichnen die Indizes  $m$ ,  $w$  und  $a$  die Matrix, Wasser und Luft.

## C: Synthetisches Beispiel

1. Erzeugen Sie sich eine Wegmatrix mit dem Python-Notebook für eine gewählte Geometrie. Wenn nicht möglich, nehmen Sie die bisherige Matrix und behalten Sie die Geometrie bei.
2. Definieren Sie eine realistische Geschwindigkeitsverteilung auf der Basis eines Wassergehalts-/Sättigungs-Modells mit mindestens 3 verschiedenen Werten und stellen Sie es dar. Schlagen Sie dafür Literaturwerte für  $v_m$ ,  $v_w$  und  $v_a$  nach.
3. Berechnen Sie die Vorwärtsantwort des synthetischen Modells. Beachten Sie, dass für die Modellierung und Inversion die Slowness als Modell betrachtet werden muss! Stellen Sie die Laufzeiten als Matrix dar und betrachten Sie deren Größenordnung.
4. Nehmen Sie ein Fehlermodell (Vektor) aus einem festen Laufzeitfehler (was ist realistisch?) und einem prozentualen Fehler von 1% an und verrauschen Sie die Daten damit. Benutzen Sie im folgenden dieses Fehlermodell zur Wichtung.
5. Berechnen Sie Inversionsergebnisse mit der TSVD und Occam-Inversion (Funktionen aus B). Passen Sie die Stärke der Regularisierung Sie dabei nach dem Diskrepanzprinzip an.
6. Berechnen Sie für beide Varianten die Modell-Auflösungsmatrix und stellen Sie a) den Auflösungsradius, und b) die Modell-Auflösung einer beliebigen Modellzelle dar.
7. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Vergleich mit dem synthetischen Experiment und die zugehörigen Auflösungseigenschaften.
8. Variieren Sie die Wichtung für die vertikale Ableitung nach oben (2) und unten (0.5) und berechnen Sie die Occam-Lösung. Vergleichen Sie die 3 Modelle.