DIS Ü03 Nachbereitungsaufgabe

Josua Kowalzik

11. November 2021

1 Aufgabe (a)

1.1 Aufgabenstellung (a)

Zeigen Sie, dass für alle aussagenlogischen Ausdrücke A, B, C die Ausdrücke

$$(\neg A \lor B) \land (B \Rightarrow (\neg C \land \neg A)) \text{ und } \neg A \land \neg(B \land C)$$

äguivalent sind. Formen Sie dazu den einen Ausdruck anhand der in der Vorlesung behandelten Grundgesetze aussagenlogischer Verknüpfungen um, bis Sie den anderen Ausdruck erhalten. Geben Sie dabei an, welches Gesetz Sie in welchem Schritt anwenden.

1.2 Lösung (a)

$$(\neg A \lor B) \land (B \Rightarrow (\neg C \land \neg A)) \tag{1}$$
$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor (\neg C \land \neg A)) \tag{2}$$
$$(\neg A \lor B) \land ((\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor \neg A)) \tag{3}$$
$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor \neg A) \tag{4}$$
$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg C) \tag{5}$$
$$(\neg A \lor (B \land \neg B)) \land (\neg B \lor \neg C) \tag{6}$$
$$\neg A \land (\neg B \lor \neg C) \tag{7}$$
$$\neg A \land \neg(B \land C) \tag{8}$$

1. Definition der Implikation (Folie 8).
2. Distributivität von Konjunktion über Disjunktion.
3. Assoziativität über Konjunktion.
4. Kommutativität über Konjunktion.
5. Distributivität von Disjunktion über Konjunktion.
6. Logik[1]: Der Ausdruck $(B \land \neg B)$ ist nicht erfüllbar. Nicht erfüllbare Klauseln über Disjunktionen können einfach weggelassen werden.
7. De Morgan.

[1] Diese Regeln werden in den Vorlesungsfolien nicht explizit erwähnt, sind allerdings Grundsätze der Aussagenlogik.

2 Aufgabe (b)

2.1 Aufgabenstellung (b)

Gegeben ist der Ausdruck

$$A := (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

in den drei Variablen x_1, x_2 und x_3. Verwenden Sie die Methode der positiven 1-Resolution gemäß der Vorlesung, um zu entscheiden, ob A erfüllbar ist. Falls ja, so geben Sie eine erfüllende Belegung an, falls nein, begründen Sie, warum A nicht erfüllbar ist. Prüfen Sie zuerst, ob die Voraussetyung für die Anwendung des Algorithmus gegeben ist.
Hinweis: Geben Sie den Algorithmus in allen einzelnen Schritten an!

2.2 Lösung (b)

Der Ausdruck liegt in Horn-SAT vor, da es sich um eine KNF handelt, bei der jede Klausel maximal ein positives Literal enthält.

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Suche nach einer Klausel der Gestalt $\{X\}$: Klausel $4 = x_3$
Lösche alle Literale der Gestalt $\neg X$: $\neg x_3$ in Klausel 1, 2 und 3:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Es ist keine leere Klausel entstanden.
Suche nach einer Klausel der Gestalt $\{X\}$: Klausel $3 = x_2$.
Lösche alle Literale der Gestalt $\neg X$: $\neg x_2$ in Klausel 1,2 und 5.

$$x_1 \wedge \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$$

Es ist keine leere Klausel entstanden.
Suche nach einer Klausel der Gestalt $\{X\}$: Klausel $1 = x_1$.
Lösche alle Literale der Gestalt $\neg X$: $\neg x_1$ in Klausel 2 und 5.

$$x_1 \wedge \{\} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_3$$

Es ist eine leere Klausel entstanden: Klausel 2 ist leer.
$\Rightarrow$ Der Ausdruck A mit den Variablen x_1, x_2 und x_3 ist nicht erfüllbar.