

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

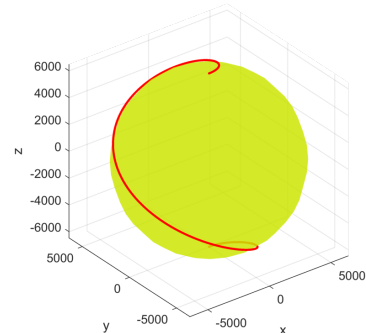
Wintersemester 2023/24

7. Übung: Kurven- und Oberflächenintegrale (Lösungen)

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie eine Flugbahnkurve vom Nord- zum Südpol, bei der Sie die Erde einmal in West-Ost-Richtung umrunden. An welcher Stelle ist das skalare Wegelement bzw. die Ableitung der Bahnkurve maximal?

Hinweis: Wir nehmen den Erdradius mit 6400km an und den Erdmittelpunkt als $(0, 0, 0)^\top$.



- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \pi \cos 2t \\ \pi \sin 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Hinweis: Es gilt $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \operatorname{arsinh}(x)$.

Lösung:

- (a) Ein solcher Weg ist z.B.

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \sin \frac{t}{2} \\ r \sin t \sin \frac{t}{2} \\ r \cos \frac{t}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \left(-r \sin t \sin \frac{t}{2} + \frac{r}{2} \cos t \cos \frac{t}{2}\right)^2 + \left(r \cos t \sin \frac{t}{2} + \frac{r}{2} \sin t \cos \frac{t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} \sin \frac{t}{2}\right)^2 \\ &= r^2 \left[\sin^2 t \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 t \cos^2 \frac{t}{2} + \cos^2 t \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 t \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} \right] \\ &= r^2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} \right] = r^2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird maximiert, wenn $|\sin \frac{t}{2}|$ maximal wird, was genau bei $t = \pi$ geschieht. Maximale Geschwindigkeit hat man also im Punkt $(-6400, 0, 0)$.

- (b) Es gilt

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (-2\pi \sin(2t))^2 + (2\pi \cos(2t))^2} = \sqrt{4t^2 + 4\pi^2}.$$

Mit der Formel aus der Vorlesung (Folie 200) erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4t^2 + 4\pi^2} dt = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{t^2 + \pi^2} dt \\ &= 2 \left(\left[t\sqrt{t^2 + \pi^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + \pi^2}} dt \right) = 2 \left(\pi\sqrt{2\pi^2} - \int_0^{\pi} \sqrt{t^2 + \pi^2} dt + \int_0^{\pi} \frac{\pi^2}{\sqrt{t^2 + \pi^2}} dt \right). \end{aligned}$$

Wir teilen durch 2, addieren das erste Integral und erhalten

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi \sqrt{t^2 + \pi^2} dt &= \pi\sqrt{2\pi^2} + \pi \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 + 1}} dt = \pi\sqrt{2\pi^2} + \pi^2 \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{t}{\pi}\right) \right]_0^\pi \\ &= \pi\sqrt{2\pi^2} + \pi^2(\operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}(0)) = \pi^2(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)) \\ & (= \pi^2(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hierbei ist $a > 0$ zu wählen. (Anm.: Es handelt sich um den Viertelbogen einer Astroide.)

- (b) Berechnen Sie das Integral der Funktion $\mathbf{F}(x, y) = [0, y]^T$ längs des Astroidenbogens aus Aufgabe (a) auf direktem Wege.
- (c) Bestätigen Sie mit der Integrabilitätsbedingung, dass es sich bei \mathbf{F} um ein Potentialfeld handelt und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential (d. h. eine Stammfunktion).
- (d) Bestimmen Sie das Integral aus Teil (b) mit diesen Erkenntnissen erneut.
- (e) Was ist der Wert des entsprechenden Arbeitsintegrals $\int \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ längs der geradlinigen Verbindung vom Anfangs- zum Endpunkt des Astroidenbogens?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= (-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \\ \Rightarrow \|\gamma'(t)\| &= 3a \cos t \sin t. \end{aligned}$$

Und damit

$$L = \int_\gamma 1 ds = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin t \cos t dt = \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\gamma(t))^\top \gamma'(t) dt = \int_0^{\pi/2} 0 \cdot (-3a \cos^2 t \sin t) + (a \sin^3 t) \cdot (3a \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} 6 \sin^5 t \cos t dt = \frac{a^2}{2} [\sin^6 t]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Damit sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Es gibt also ein Potential $V(x, y)$ mit $\nabla V(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$.

$$V_x(x, y) = F_1(x, y) = 0 \Rightarrow V(x, y) = C(y) \Rightarrow V_y = C'(y) = y \Rightarrow V(x, y) = C(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

Alternativ kann man das Potential auch über das Arbeitsintegral für die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

bestimmen:

$$\begin{aligned} V(x, y) - V(0, 0) &= \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t))^\top \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 [0 \quad ty] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt = \int_0^1 ty^2 dt = y^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Mit $V(0, 0) = c$ ergibt sich das selbe Potential.

(d) Mit dem Potential $V(x, y) = y^2/2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= [a \ 0]^\top \\ \gamma(\pi/2) &= [0 \ a]^\top \\ \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= V(0, a) - V(a, 0) = \frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

(e) Da in einem stetigen Potentialfeld das Arbeitsintegral nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, ändert sich der Wert des Arbeitsintegrals nicht, wenn man sich anstatt auf dem Astroidenbogen geradlinig von Anfangs- zum Endpunkt bewegt.

Aufgabe 3

Man berechne das Arbeitsintegral über $\mathbf{F}(x, y) = [xy^2, x^2 - y^2]^\top$ entlang des Weges $y^2 = 3x$ von $(0, 0)$ nach $(3, 3)$ sowie entlang des Streckenzugs von $(0, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 3)$.

Lösung:

Es ergibt sich die Kurve $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{3t})$, $t \in [0, 3]$, mit $\gamma_1'(t) = [1, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}]$, ergo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^3 [3t^2, t^2 - 3t] \cdot \left[1, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \right]^\top dt = \int_0^3 3t^2 + \frac{\sqrt{3}t^2}{2\sqrt{t}} - \frac{3\sqrt{3}t}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^3 3t^2 dt + \int_0^3 \frac{\sqrt{3}}{2} t^{3/2} dt - \int_0^3 \sqrt{3} \frac{3}{2} t^{1/2} dt \\ &= t^3 \Big|_0^3 + \frac{\sqrt{3}}{5} t^{5/2} \Big|_0^3 - \sqrt{3} t^{3/2} \Big|_0^3 \\ &= 27 + \frac{27}{5} - 9 = \frac{117}{5}. \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^3 [t \cdot 0^2, t^2 - 0^2] \cdot [1, 0]^\top \, dt + \int_0^3 [3 \cdot t^2, 3^2 - t^2] \cdot [0, 1]^\top \, dt \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_0^3 3^2 - t^2 \, dt = 9t - \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^3 = 27 - 9 = 18. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Vektorfelder, ob diese Potentialfelder sind und geben Sie ggf. die Potentialfunktion an:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = [1, 1, 1]^\top$, (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = [2x, 2y, 0]^\top$, (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = [yz, xz, x^2]^\top$.

Lösung:

- (a) Es gilt $\frac{\partial F_i}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial F_i}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F_i}{\partial z}(x, y, z) = 0$, ergo ist \mathbf{F} ein Potentialfeld. Wir erhalten als Potential

$$V(x, y, z) = x + C(y, z), \quad C_y(y, z) = 1 \Rightarrow C(y, z) = y + C(z), \quad C_z(z) = 1 \Rightarrow C(z) = z + c$$

also $V(x, y, z) = x + y + z + c$.

- (b) Es gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z),$$

ergo ist \mathbf{F} ein Potentialfeld. Wir erhalten als Potential

$$V(x, y, z) = x^2 + C(y, z), \quad C_y(y, z) = 2y \Rightarrow C(y, z) = y^2 + C(z), \quad C_z(z) = 0 \Rightarrow C(z) = c$$

also $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + c$.

- (c) Es gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = z = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = y \neq 2x = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z),$$

ergo ist \mathbf{F} kein Potentialfeld.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel mit Radius $r > 0$.

Lösung:

Aus den Kugelkoordinaten erhalten wir die folgende Parametrisierung für die Kugeloberfläche:

$$D = \{(\phi, \theta) : \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi)\} \quad \Phi(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$\mathbf{t}_\phi = [-r \sin \phi \sin \theta, r \sin \phi \cos \theta, 0]^\top, \quad \mathbf{t}_\theta = [r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, -r \sin \theta]^\top$$

und damit

$$E(\phi, \theta) := \mathbf{t}_\phi^\top \mathbf{t}_\phi = r^2 \sin^2 \theta$$

$$F(\phi, \theta) := \mathbf{t}_\phi^\top \mathbf{t}_\theta = 0$$

$$G(\phi, \theta) := \mathbf{t}_\theta^\top \mathbf{t}_\theta = r^2.$$

Ergo

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{E(\phi, \theta)G(\phi, \theta) - F^2(\phi, \theta)} \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} \, d\phi \, d\theta = 2\pi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

den gleichen Oberflächeninhalt besitzen.

Lösung:

Die Parametrisierung der Oberfläche des Paraboloids ergibt sich zu

$$D = [-1, 1]^2 \quad \Phi(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 2u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$

und damit $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mit $f(u, v) = 2u^2 + v^2$. Ergo

$$O = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 16u^2 + 4v^2} \, du \, dv.$$

Analog für das Hyperboloid

$$D = [-1, 1]^2 \quad \Phi(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2 - 2v^2 \end{bmatrix}$$

und damit $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mit $f(u, v) = u^2 - 2v^2$. Ergo

$$O = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2} \, du \, dv.$$