
Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 10

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben sind die nachstehenden Zahlenfolgen $n \mapsto a_n$, wobei $n \in \mathbb{N}^\times$, durch Angabe einer expliziten Bildungsvorschrift der Form

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad n \mapsto a_n = (-1)^n \frac{2}{n+3} & \text{(ii)} \quad n \mapsto a_n = \frac{2}{3^n} & \text{(iii)} \quad n \mapsto a_n = \frac{4n^2-5n}{8n^2-6n+1} \\ \text{(iv)} \quad n \mapsto a_n = \frac{\cos(n^2)}{8n^2-6n+1} & \text{(v)} \quad n \mapsto a_n = \sqrt{\frac{3n^3+n}{2n+1}} & \end{array}$$

- (a) Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ auf Monotonie und Beschränktheit.
(b) Berechnen Sie, falls vorhanden, den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Aufgabe 2: Die nachstehenden reellen Funktionen beschreiben harmonische Schwingungen.

$$\text{(a)} \quad t \mapsto y(t) = 2 \cdot \sin(2t - 4), \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad t \mapsto y(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Skizzieren Sie jeweils den Funktionsgraphen. Untersuchen Sie die Funktionen innerhalb einer Periode auf Monotonie und Beschränktheit.

Aufgabe 3: Berechnen Sie unter Benutzung der Eigenschaften der jeweiligen Funktionsklasse alle Nullstellen der reellen Funktionen

$$h_j : x \mapsto y = h_j(x), \quad j \in \{1; 2; 3; 4\}$$

in der reellen Variablen $x \in D_i$,

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad h_1(x) = x^4 - 3x^3 + 2x, \quad D_1 = \mathbb{R} & \text{(b)} \quad h_2(x) = \sin(\omega x + \phi) \quad (\omega \neq 0), \quad D_2 = \mathbb{R} \\ \text{(c)} \quad h_3(x) = 2 \cos(3x) - 1, \quad D_3 = \mathbb{R} & \text{(d)} \quad h_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad D_4 = \mathbb{R}. \end{array}$$

Aufgabe 4: Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{und} \quad g(x, y) = \cos x \cdot \sin y$$

und maximal möglichen Definitionsmengen.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

- (a) Berechnen Sie die Bilder von $t = \frac{\pi}{3}$ unter f bzw. von $x = y = \frac{\pi}{4}$ unter g .
(b) Berechnen Sie alle $(x, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ mit $g(x, y) = 0$.
(c) Fassen Sie $f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ als Koordinaten eines Punktes P auf¹

$$(\cos t, \sin t) \quad \leftrightarrow \quad P(\cos t, \sin t)$$

und beschreiben Sie den Wertebereich W_f in der reellen Ebene.

$$(i) y = h_1(x) = \ln(|x|) \qquad (ii) y = h_2(x) = \ln(\cos x + 0.5)$$

$$(iii) y = h_3(x) = x \cdot e^{-2x}$$

Diskutieren Sie Eigenschaften wie Monotonie, Periodizität und Beschränktheit der Funktionen.