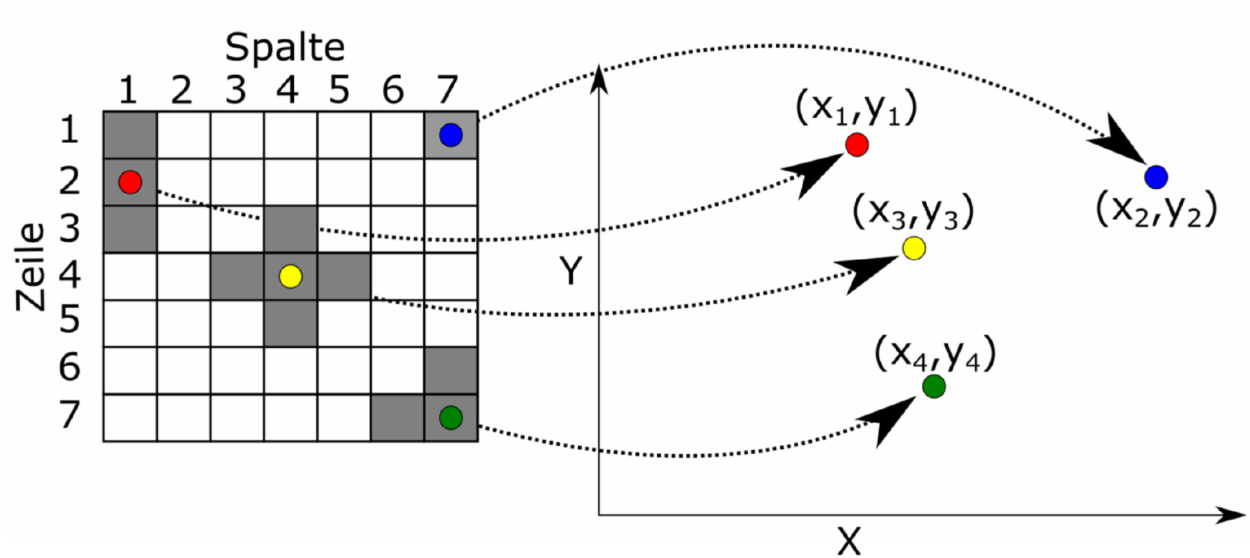
Übersicht

1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen (Vorlesung 1)
2. **Koordinatensysteme und -transformationen**
3. Räumliche Datenmodellierung
4. Vermaschungen
5. Räumliche Interpolation
6. Transformationen, Filtermethoden, Sonstiges

Georeferenzierung

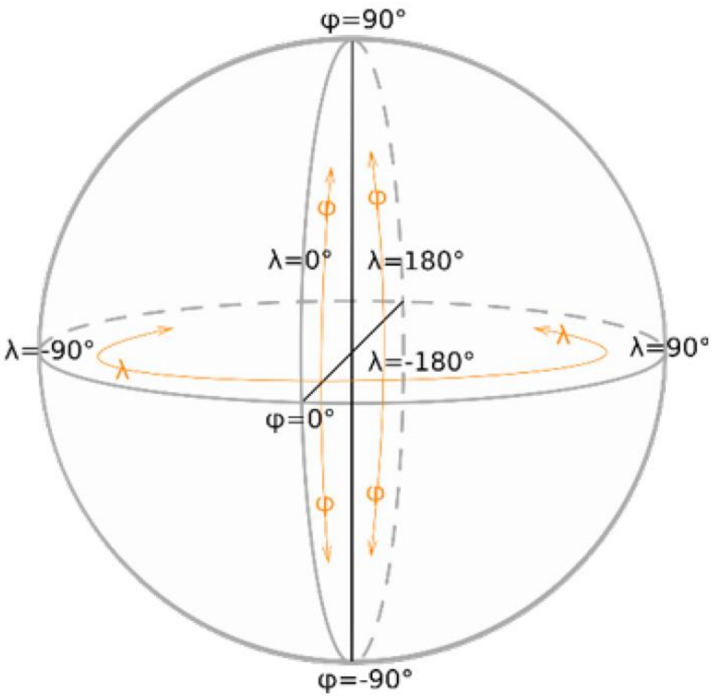
Eine der grundlegenden Aufgaben in einem GIS Projekt ist die Georeferenzierung, um verschiedene Datensätze räumlich miteinander vergleichen und kombinieren zu können (z.B. Luftbildaufnahme, Topographische Karte, geochemische Punktdaten).



Ein **erstes Problem**: Wie bekomme ich die kugelförmige Erde auf die Ebene projiziert?

Kartenprojektion

- Jeder Punkt ím Raum kann durch 3 kartesische Koordinaten x,y,z gegeben warden
- Problem 1: eine Karte ist üblicherweise 2-D
- Problem 2: die Erde ist kugelförmig



Transformation zwischen sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) und kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\lambda)sin(\varphi) \\ r\,sin(\lambda)\,sin(\varphi) \\ r\,cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für r>0, 0≤λ<2π, und 0≤φ≤π.

Umwandlung der Einheiten in “Grad”:
-180°≤λ<180° und -90°≤φ≤90°.

Um es 2D darstellen zu können brauchen wir eine Referenzfläche.

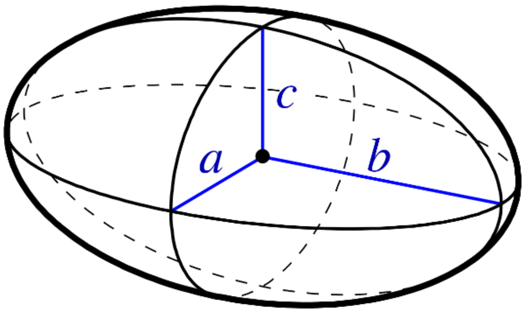
Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid**: a=b
- Kugel: r=a=b=c (z.B. r=6371.2km)



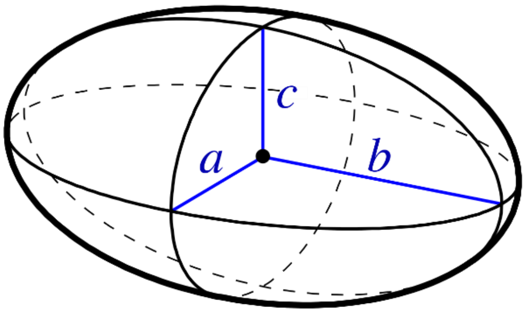
Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid**: a=b
- Kugel: r=a=b=c (z.B. r=6371.2km)



Wichtige Referenzellipsoide sind z.B.

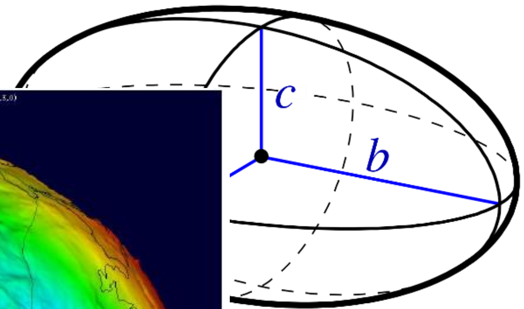
WGS84 (Nutzung für GPS): a=b=6378.137km, c=6356.752km
Bessel (1841): a=b=6377.379km, c=6356.079km

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =$$

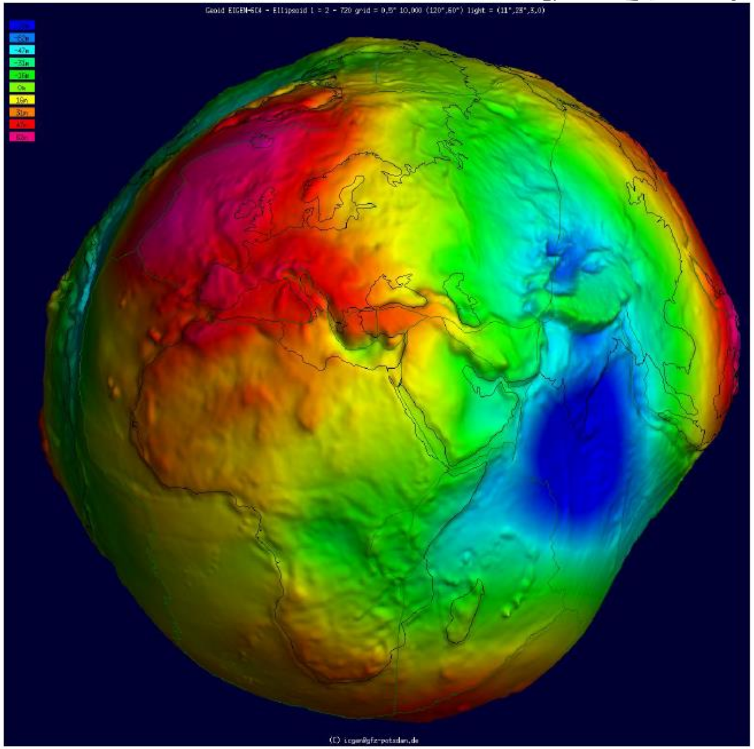
- **Rotationsellipsoid**
- Kugel: r=a=b=c (z.B



Wichtige Referenzellips

WGS84 (Nutzung für G
Bessel (1841): a=b=63

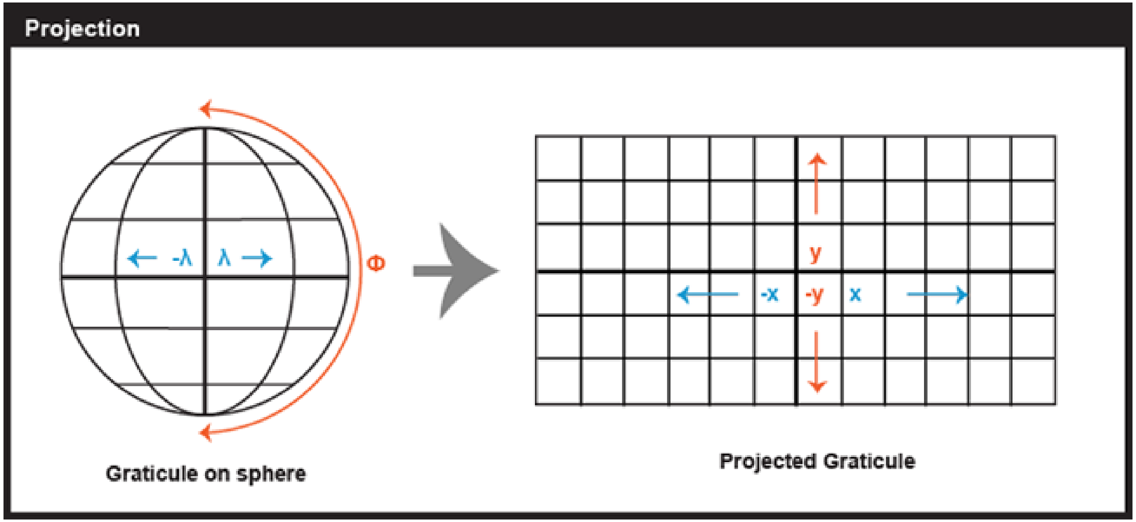
- physikalische mo   äche eines konstanten Gravitationspotentia



icgem.gfz-potsdam.de

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?



www.e-education.psu.edu/geog160/node/1918

Problem: Finde eine geeignete Abbildung

$T : \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}_r \to \mathbb{R}^2$,

oder alternativ $T : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- Flächentreu

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

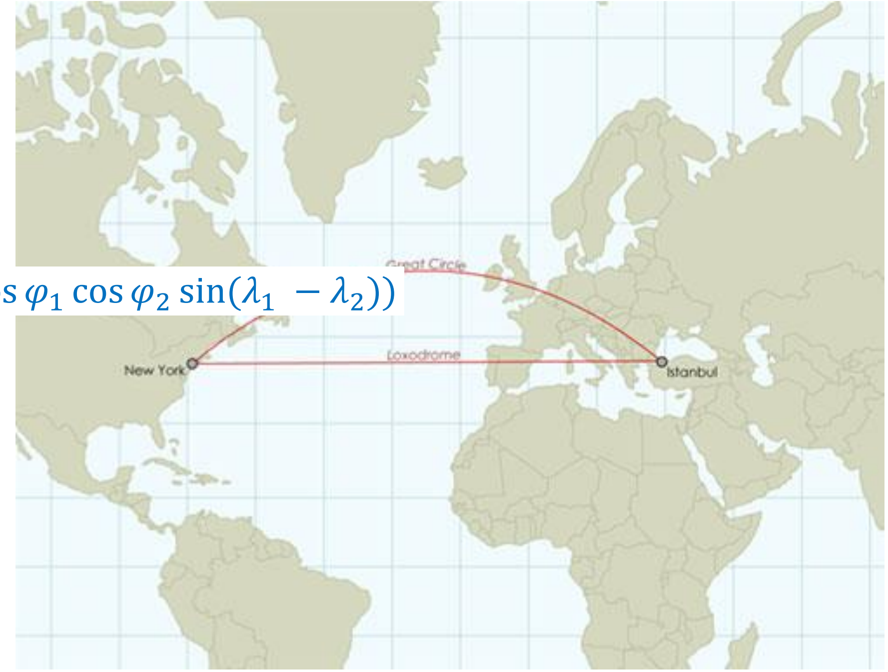
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

$$\mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r \arcsin(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises



https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

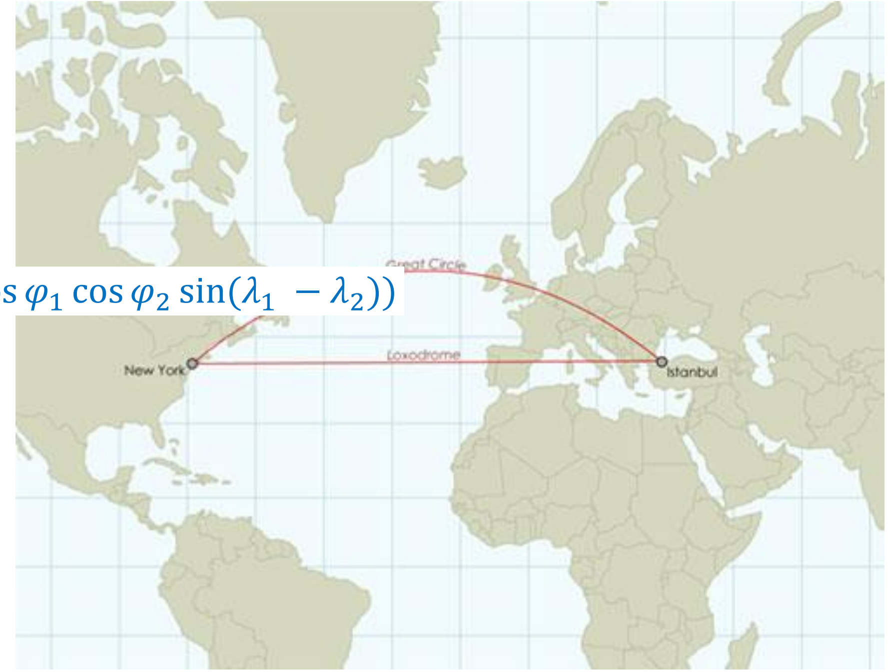
$$\mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r\arcsin(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises

Kürzeste Distanz auf euklidischer Ebene:

$$\mathrm{dist}_{eucl}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(Satz des Phytagoras)



https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Eine Projektion heißt *längentreu* (mit Maßstab α), falls

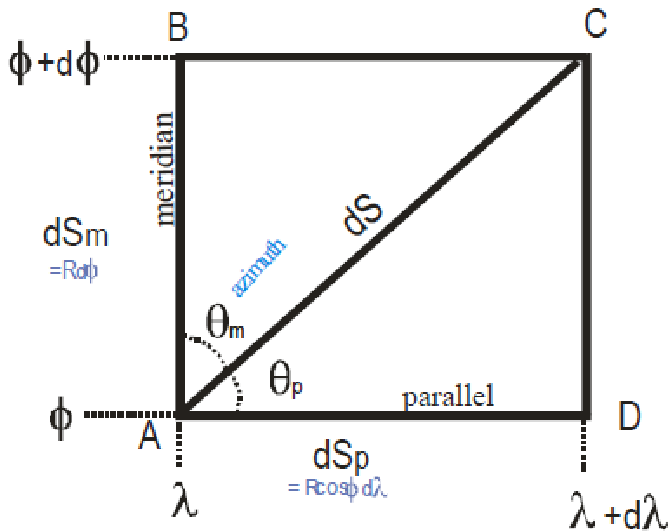
$$\mathrm{dist}_{eucl}(P_1, P_2) = \alpha \mathrm{dist}_{sph}(P_1, P_2)$$

Global längentreue Abbildungen **gibt es nicht**, aber Längentreue unter bestimmten Annahmen kann garantiert warden (z.B. von einem zentralen Punkt aus)

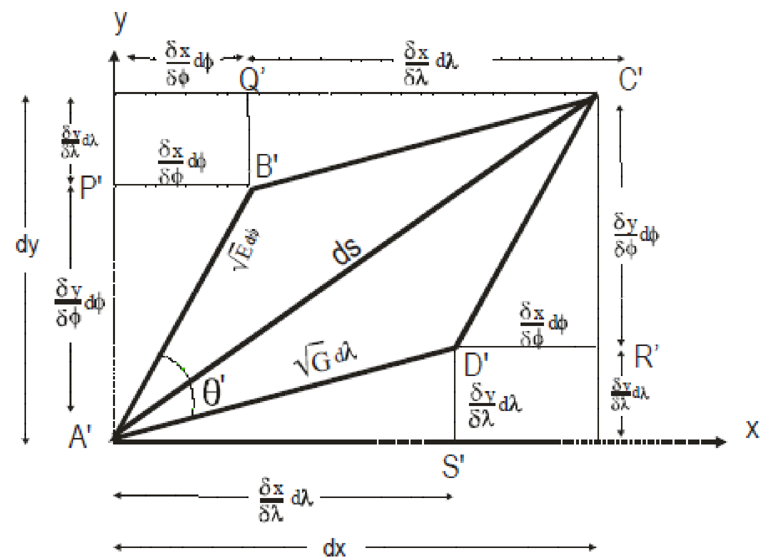
https://www.axismaps.com/guide/map-projections

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrössen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi\, d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E,F,G: Gaussche Fundamentalgrössen

Kartenprojektion

Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrössen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi\, d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E,F,G: Gaussche Fundamentalgrössen

Mit

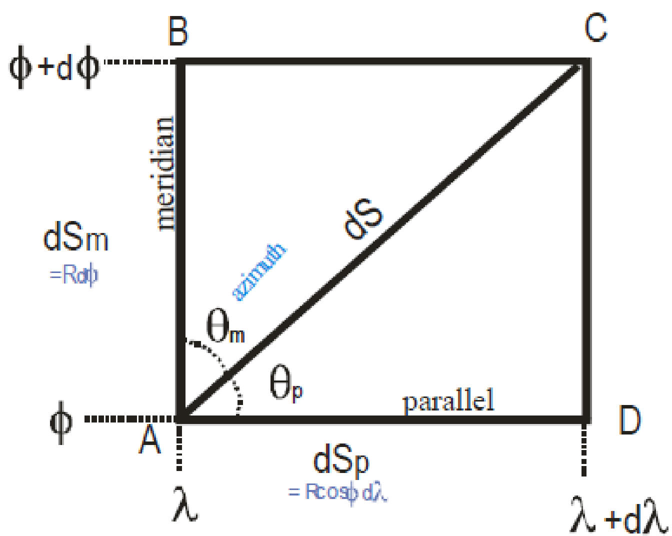
$$E(\, d\varphi\,)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2\right) d\varphi^2$$

$$G(\, d\lambda\,)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}\right)^2\right) d\lambda^2$$

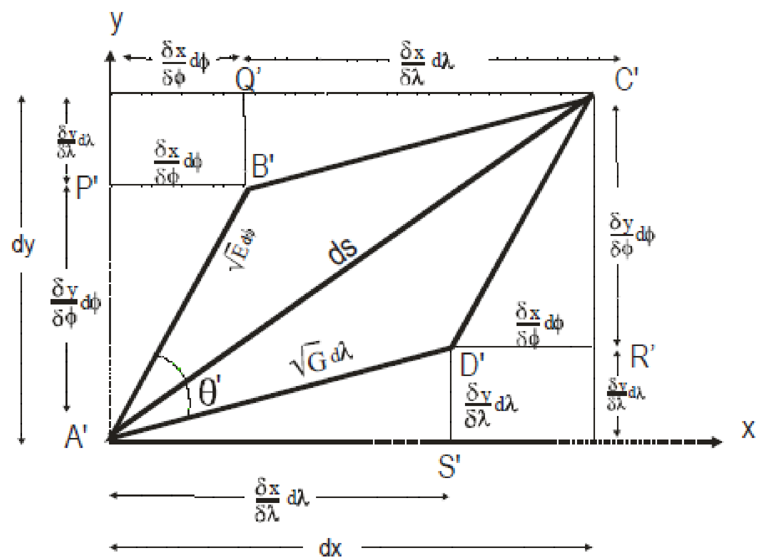
$$F(\, d\varphi d\lambda\,) = \left(\frac{\partial x(\lambda,\varphi)^2}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y(\lambda,\varphi)^2}{\partial \varphi \partial \lambda}\right) d\varphi d\lambda$$

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Skalen/Massstäbe:

$$\alpha_\lambda = \frac{A'D'}{AD} = \frac{\sqrt{G}}{r\cos(\varphi)}$$

$$\alpha_\varphi = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{E}}{r}$$

$$\alpha = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{E(d\varphi)^2+2F(d\varphi\, d\lambda)+G(d\lambda)^2}}{\sqrt{(d\varphi)^2+(\cos\varphi)^2(d\lambda)^2}}$$

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

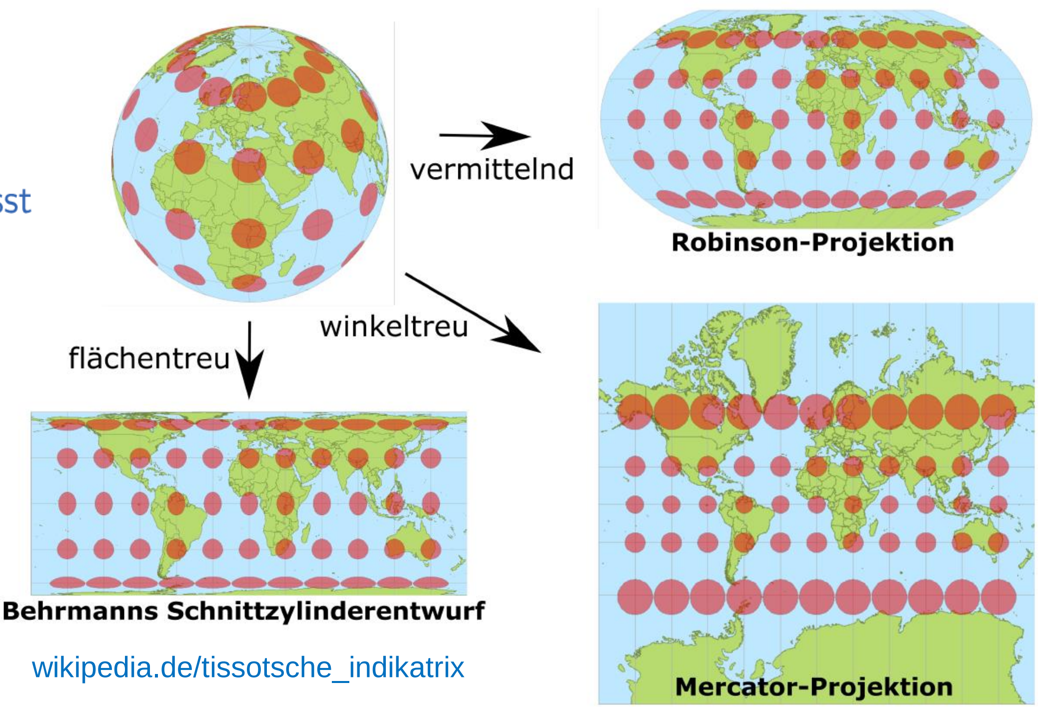
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- **Winkeltreu**
- Längentreu
- Flächentreu

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ heisst winkeltreu (konform), falls

$$\frac{\langle TP, TQ \rangle}{\|TP\| \|TQ\|} = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\| \|Q\|}$$

für alle P, Q aus dem Tangentialraum der Sphäre, und falls die Determinante von T positiv ist.



wikipedia.de/tissotsche_indikatrix

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche auf eine Ebene projeziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine blosse Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

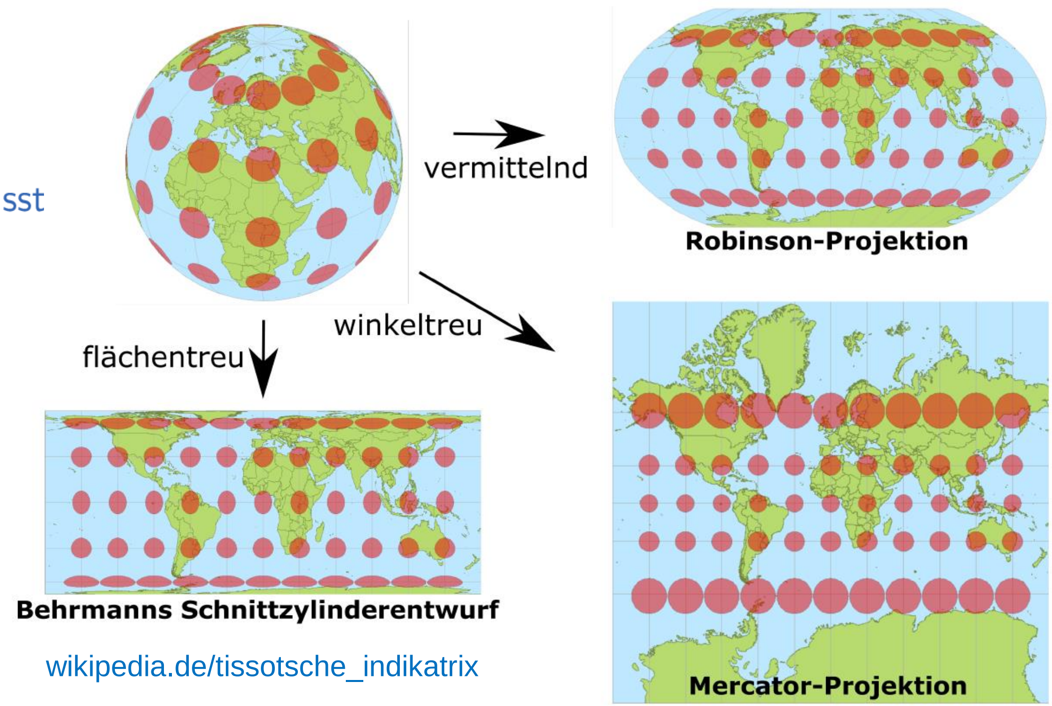
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- **Flächentreu**

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ heisst flächentreu, falls

$$\int_\Omega 1\, d\mu = \alpha \int_{T(\Omega)} 1\, d(x,y)$$

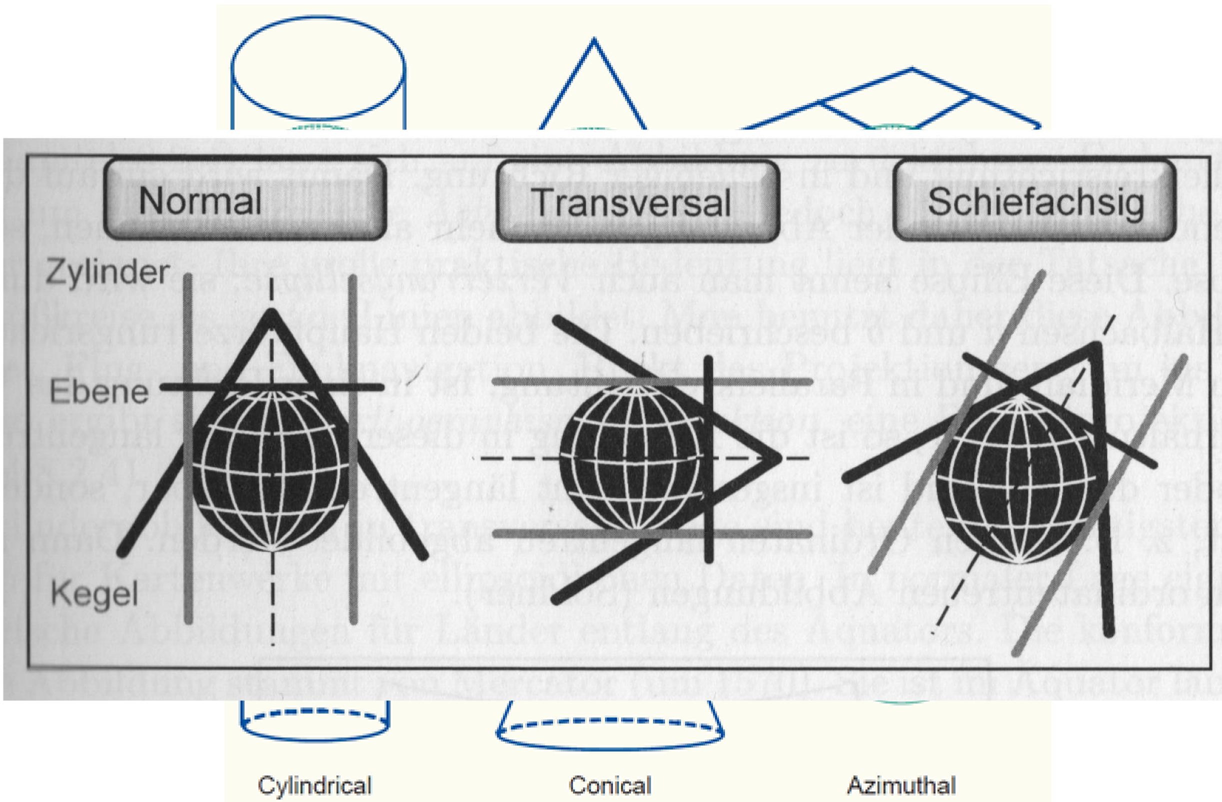
für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{S}_r$. Die Konstante α spiegelt dabei den Massstab wieder (Massstab sei hier als ein Skalierungsfaktor aufgefasst, nicht der umgangssprachliche Massstab).



wikipedia.de/tissotsche_indikatrix

Kartenprojektion

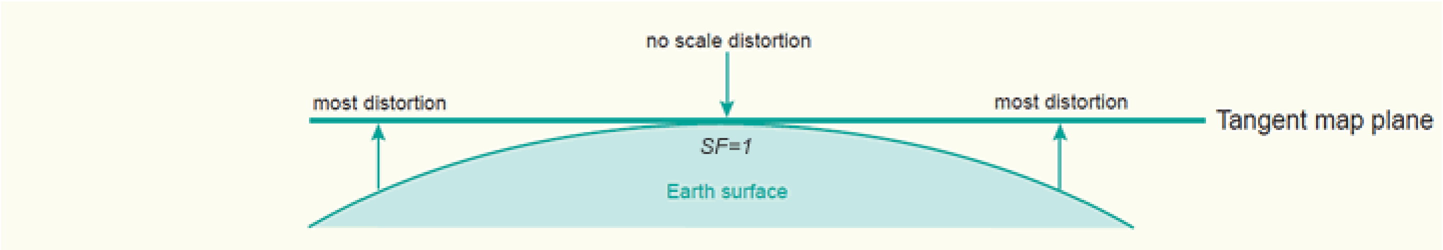
Man unterscheidet Kartenprojektionen basierend auf den Projektionsflächen

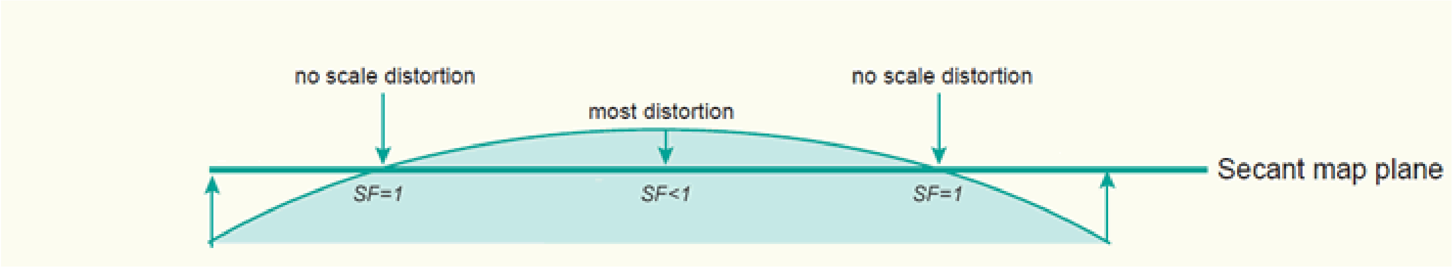


https://kartoweb.itc.nl

Kartenprojektion

Der Skalierungsfaktor beschreibt den Quotienten zwischen dem wahren Abstand zweier infinitesimal entfernten Punkte P und Q und dem Abstand der auf die Ebene projizierten Punkte TP und TQ.





https://kartoweb.itc.nl

Welche Projektionsebene würden Sie bevorzugen?

Kartenprojektion

Beispiele für winkeltreue Projektionen:

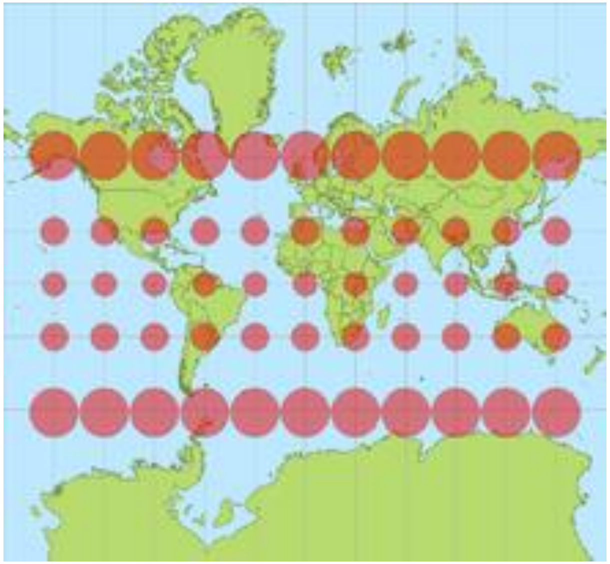
- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

  $$x = r(\lambda - \lambda_0)$$
  $$y = r \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

  Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

  $$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$
  $$\varphi = 2 \arctan\left(\exp\left(\frac{y}{r}\right)\right) - \frac{\pi}{2}$$



Kartenprojektion

Beispiele für winkeltreue Projektionen:

- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

  $$x = r(\lambda - \lambda_0)$$
  $$y = r \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

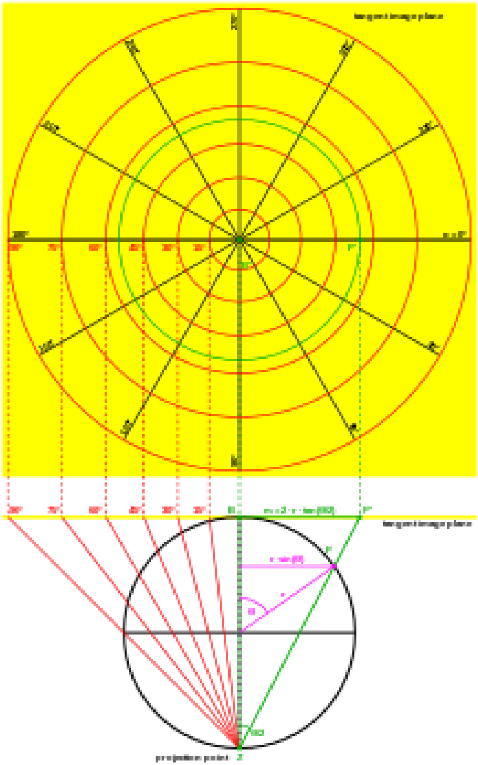
  Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

  $$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$
  $$\varphi = 2 \arctan\left(\exp\left(\frac{y}{r}\right)\right) - \frac{\pi}{2}$$

- **Stereographische Projektion** (azimuthale Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi) = s(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, wobei

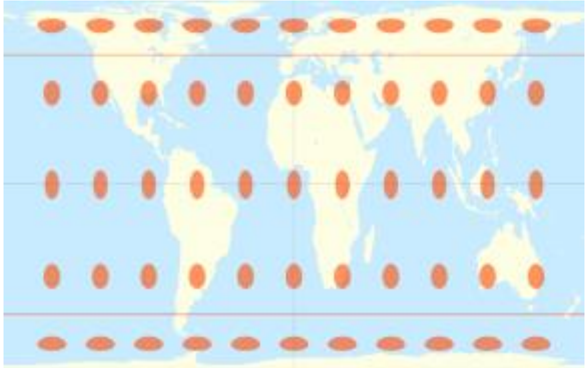
  $$\alpha = \lambda$$
  $$s = 2r \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$



Kartenprojektion

Beispiele für flächentreue Projektionen:

https://map-projections.net/compare.php



- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

  $$x = r\lambda$$
  $$y = 2r\sin(\varphi)$$

Kartenprojektion

Beispiele für flächentreue Projektionen: **https://map-projections.net/compare.php**

- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

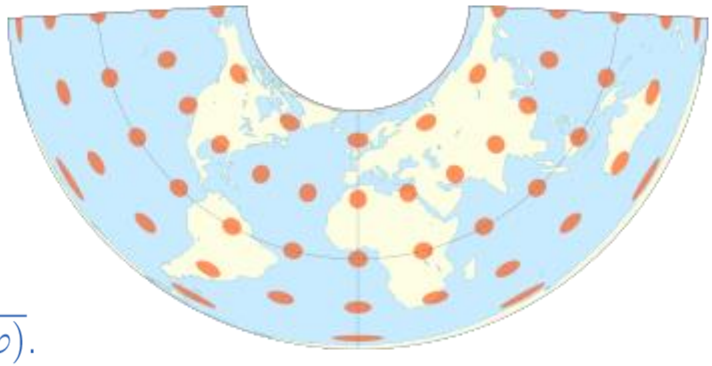
  $$x = r\lambda$$
  $$y = 2r\sin(\varphi)$$

- **Albers Kegelprojektion**

  Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$, sowie $\lambda_0, \varphi_1, \varphi_2$ Referenzlängen- bzw. -breitengrade:

  $$x = \rho\sin(\theta)$$
  $$y = \rho_0 - \rho\cos(\theta),$$

  wobei $\theta = \beta(\lambda - \lambda_0)$, $\beta = \frac{1}{2}(\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))$, $\gamma = \cos^2(\varphi_1) + 2\beta\sin(\varphi_1)$, und $\rho = \frac{r}{\beta}\sqrt{\gamma - 2\beta\sin(\varphi)}$.

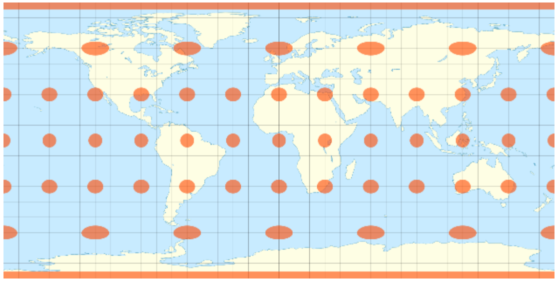


Kartenprojektion

Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

- **Quadratischde Plattkarte**: längentreu entlang der Meridiane
    - Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
    - Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
    - Transformation:

$$x = (\lambda - \lambda_0)\cos\varphi_1$$
$$y = \varphi - \varphi_1$$



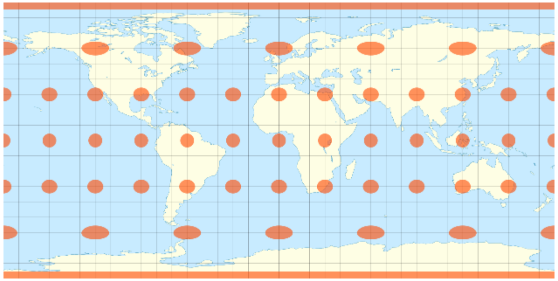
https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte

Kartenprojektion

Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

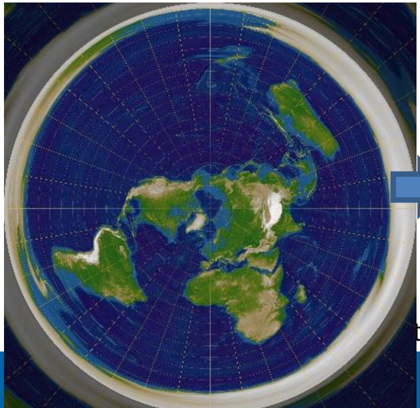
- **Quadratischde Plattkarte**: längentreu entlang der Meridiane
    - Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
    - Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
    - Transformation:

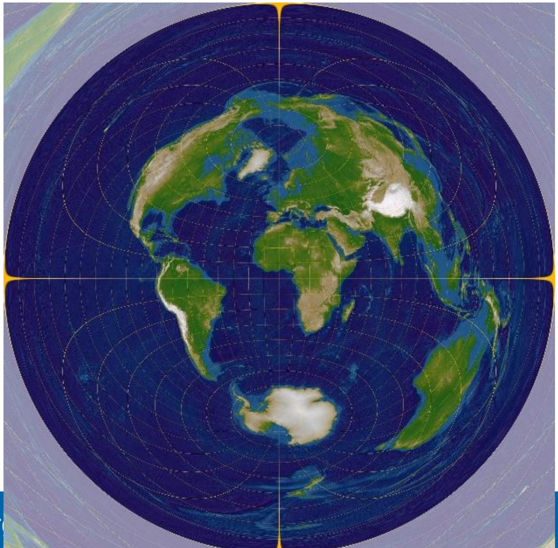
$$x = (\lambda - \lambda_0)\cos\varphi_1$$
$$y = \varphi - \varphi_1$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte

- **Mittelabstandstreue Azimutalprojektion:** längentreu von zentralem Punkt aus



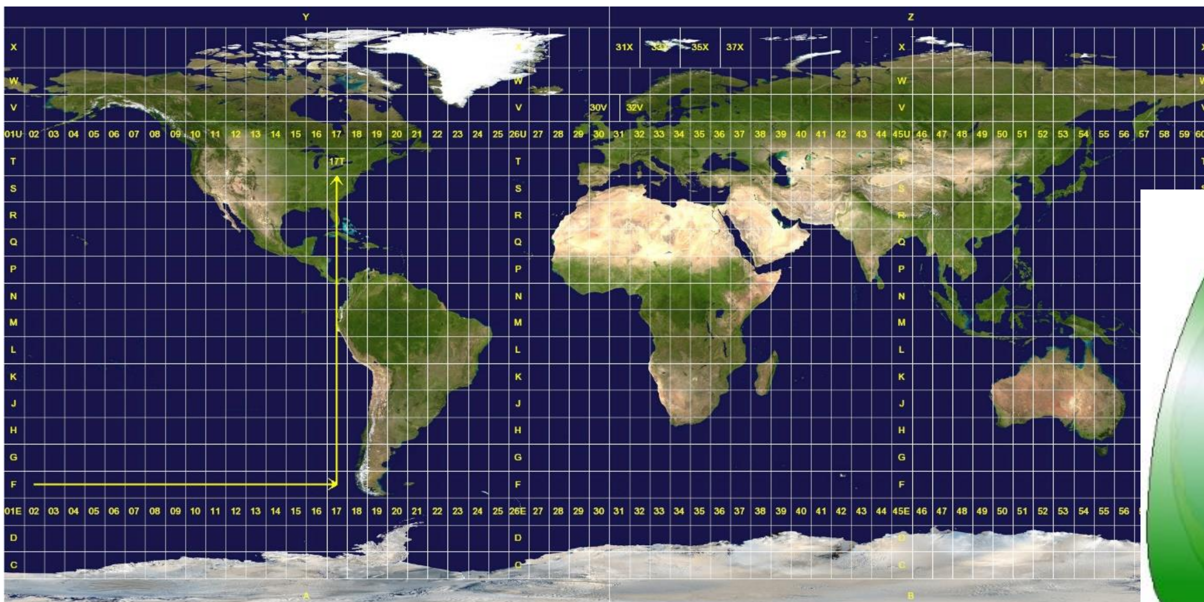


ttabstandstreue_Azimutalprojektion

Kartenprojektion

Sehr häufig verwendet: **UTM (Universal Transverse Mercator)**, Skalierungsfaktor α>0.9996

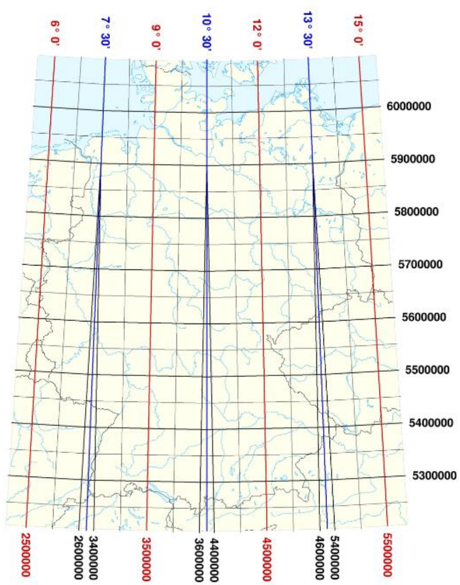
- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 6° Breite
- Jede Zone nutzt eine transversale Mercator Schittzylinderprojektion
- Referenzellipsoid ist GRS80 (nicht die Kugeloberfläche, wie bei den vorher angegebenen Tranformationsformeln)



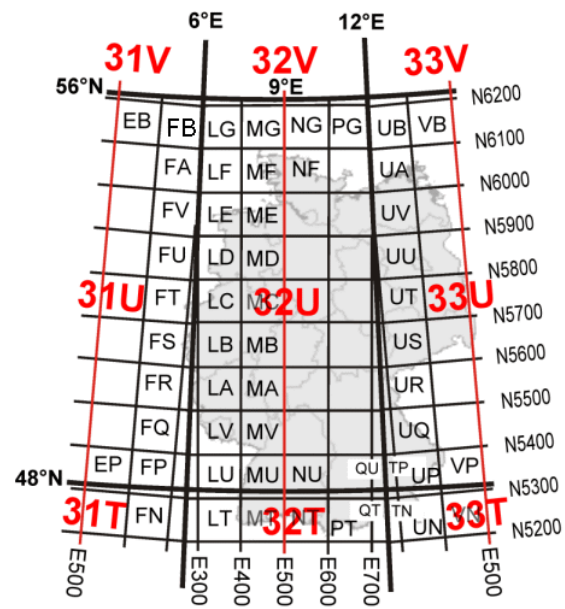
Kartenprojektion

Ebenfalls sehr häufig verwendet: **Gauss-Krüger**; nutzt ebenfalls transversale Mercator Projektion; Unterschiede zu UTM**:**

- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 3° Breite
- Referenzellipsoid ist Bessel



Gauss-Krüger



UTM

Georeferenzierung

Georeferenzierung umfasst (grob gesagt) den Workflow, welcher den externen Raumbezug der eigentlichen Daten in den Raumbezug des GIS-Projektes umwandelt. Es muss der externe Raumbezug (z.B. geographische Koordinaten (λ,φ) oder Pixel in einem Luftbild) in ein üblicherweise durch (x,y)-Koordinaten gegebenen Raumbezug des GIS Projektes (lokales Koordinatensystem).

Im engeren Sinne bezeichnet **Georeferenzierung** die Zuweisung eines Raumbezuges zu einem Datensatz und **Geokodierung** die Überführung zwischen Koordinatensystemen.