Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im eindimensionalen Potential $V(q) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(q^2 - \frac{q^4}{l_0^2}\right)$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion? Finden Sie den zu q konjugierten Impuls. Ist die Energie eine Erhaltungsgröße? Leiten Sie die Hamilton-Funktion her.

(b) Diskutieren Sie die Bewegung für gegebene Energie E. *Hinweise*: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $V(q)$. Finden und klassifizieren Sie die Extrema von $V(q)$.

(c) Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum. Bestimmen Sie die Separatrix $p = \tilde{p}(q)$, die im Phasenraum die verschiedenen Bewegungstypen trennt.

(d) Finden Sie die Bewegung $q = q(t)$ auf der Separatrix 1. für die Anfangsbedingung $q(t = 0) = 0$ und 2. für die Anfangsbedingung $q(t = 0) = l_0$.

Hinweis: $$\int dx \, \frac{a}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \operatorname{Artanh} \frac{x}{a} & \text{für } |x| < a, \\ \operatorname{Arcoth} \frac{x}{a} & \text{für } |x| > a. \end{cases}$$

(a) $$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(q^2 - \frac{q^4}{l_0^2}\right)$$

zu q konj. Impuls ist

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

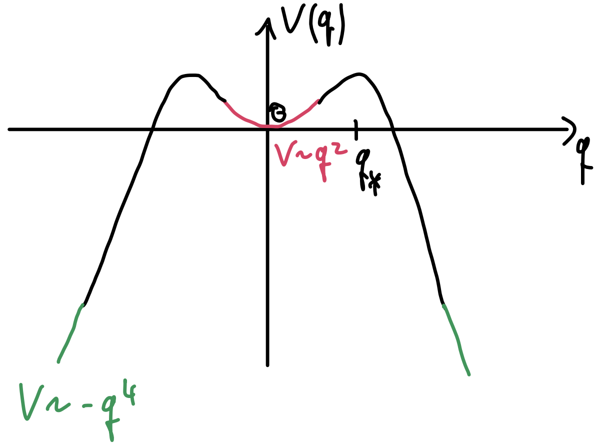
Hamiltonfunktion:

$$H = p\dot{q} - L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(q^2 - \frac{q^4}{l_0^2}\right) = T + V = E$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(q^2 - \frac{q^4}{l_0^2}\right)$$

ist Erhaltungsgröße (da $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) und da weiterhin keine rheonomen ZB ex., entspricht diese der Gesamtenergie

(b) Potential



Extrema $q_* \neq 0$

$$0 \stackrel{!}{=} \left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_*} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(2 \cancel{q_*} - 4 \frac{q_*^{\cancel{3}\,2}}{l_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2 \frac{q_*^2}{l_0^2} = 0 \iff q_* = \pm \frac{l_0}{\sqrt{2}}$$

Man findet: q_* sind Maxima mit

$$V_* = V(q_*) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(\frac{l_0^2}{2} - \frac{l_0^2}{4} \right) = \frac{1}{8} m \omega_0^2 l_0^2$$

Damit:

- für $E > V_*$: unbeschränkte Bewegung im gesamten Raum (Bereich A)
- für $E < V_*$ und $|q| < q_*$: gebundene Bewegung um Potentialminimum bei $q = 0$ (Bereich B)

- für $E < V_*$ und $|q| > q_*$ (Bereich C) ungeb. Bewegung, aber nur innerhalb eines Halbraumes
- Separatrix bei $E = V_*$:

$$\frac{1}{8} m\omega_0^2 l_0^2 \overset{!}{=} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2\left(q^2 - \frac{q^4}{l_0^2}\right)$$

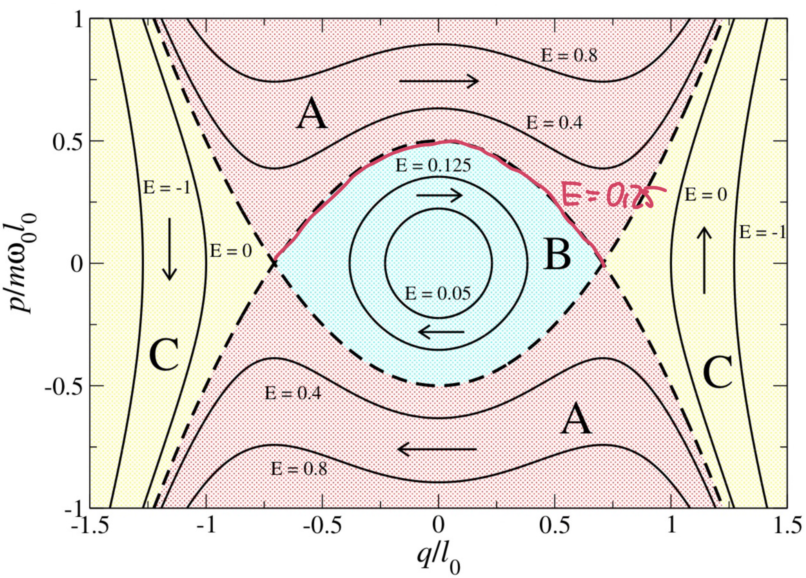
$$\Leftrightarrow \quad \tilde{p}(q) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{\frac{1}{8} m\omega_0^2 l_0^2 - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \frac{q^4}{l_0^2}}$$

$$= \pm m\omega_0 \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - 2\,\frac{l_0}{2}\,\frac{q^2}{l_0} + \left(\frac{q^2}{l_0}\right)^2}$$

$$= \pm m\omega_0 \left| \frac{q^2}{l_0} - \frac{l_0}{2} \right| \qquad (*)$$

(c) Phasenraumbahnen

$$p(q) = \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \frac{q^4}{l_0^2}}$$



Separatrix bei $E = 0{,}25$

(d) Bewegung auf d. Separatrix: mit (*) u. $p = m\dot{q}$:

$$\cancel{m}\dot{q} = \pm \cancel{m}\omega_0 \left| \frac{q^2}{l_0} - \frac{l_0}{2} \right|$$

Mit AB $q(0) = q_0$

1. $q_0 = 0$. Dann ist $\frac{q^2}{l_0} < \frac{l_0}{2}$ nahe $t=0$

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \mp \frac{\omega_0}{l_0}\left(q^2 - \frac{1}{2} l_0^2\right)$$

Trennung d. Variable

$$\int_0^{q(t)} dq \, \frac{1}{q^2 - \frac{1}{2} l_0^2} \overset{!}{=} \mp \int_0^t d\tilde{t} \, \frac{\omega_0}{l_0} = \mp t \frac{\omega_0}{l_0}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{l_0} \int_0^{q(t)} \frac{\frac{l_0}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} l_0^2 - q^2} \, dq$$

$$\underset{|q(t)| < \frac{l_0}{\sqrt{2}}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{l_0} \left[\mathrm{Artanh}\left(\frac{q(t)\sqrt{2}}{l_0}\right) - \cancel{\mathrm{Artanh}(0)} \right]$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \pm \frac{l_0}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)$$

Einlaufen in hyperbolische Fixpunkte

2. $q_0 = l_0$. Hier ist $\frac{q^2}{l_0} - \frac{l_0}{2} > 0$ nahe $t=0$

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \pm \frac{\omega_0}{l_0}\left(q^2 - \frac{1}{2}l_0^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{l_0}^{q(t)} \frac{dq}{q^2 - \frac{1}{2}l_0^2} = -\frac{\sqrt{2}}{l_0} \int_{l_0}^{q(t)} \frac{l_0/\sqrt{2}}{l_0^2/2 - q^2}\, dq$$

$$\underset{|q(t)| > \frac{l_0}{\sqrt{2}}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{l_0}\left[\operatorname{Arcoth}\left(\frac{q(t)\sqrt{2}}{l_0}\right) - \operatorname{Arcoth}\left(\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \pm \int_0^t d\tilde{t}\, \frac{\omega_0}{l_0} = \pm \frac{\omega_0 t}{l_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad q(t) = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \coth\left(\operatorname{Arcoth}\sqrt{2} \mp \frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)$$

Hier ist nur die „+"-Lsg. relevant, da nur diese für $t \to \infty$ in den hyperbolischen Fixpunkt $q_* = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ einläuft