

## Mathematik IV (für IF, ET, Ph) Sommersemester 2025

### 6. Übung: Kombinatorik und Ereignisalgebra

#### Aufgabe 1

Zur Bearbeitung eines Werkstückes seien 10 Arbeitsgänge von je einer Maschine auszuführen und in ihrer Reihenfolge austauschbar. Die ökonomisch-technologische Bewertung jeder Variante dauere  $1h$ . Wie lange würde die Gesamtbewertung zur Findung des optimalen Maschinen-Layouts dauern?

Lösung: Wir benötigen die Anzahl aller möglichen Maschinen-Layouts. In jedem Layout soll jeder Arbeitsgang genau einmal auftreten. In einem gültigem Layout kann man für den ersten Arbeitsschritt frei wählen, hat also 10 Möglichkeiten, für den zweiten Arbeitsschritt wählt man aus den verbleibenden 9, usw. Für den vorletzten Schritt hat man nur noch 2 Möglichkeiten, für den letzten Schritt genau einen. Es ergeben sich also  $10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3.628.800$  Möglichkeiten. Alle Layouts auszuwerten dauert also  $3.628.800h$ . Dies sind 151.220 Tage oder 414,24657 Jahre.

#### Aufgabe 2

Wie viele Zeichen des Morse-Alphabetes lassen sich bilden, wenn ein Zeichen aus

- a) genau fünf Elementen      b) höchstens fünf Elementen bestehen soll?

Lösung: Im Morse-Alphabet stellt man Zeichen als eine Folge kurzer und langer Signale dar. (Pausen werden nur zum Trennen von Zeichen und Wörtern benutzt.)

- a) Wir müssen genau 5 Signale benutzen. Für jede der 5 Positionen im Zeichen haben wir genau 2 Möglichkeiten (lang, kurz). Somit gibt es genau

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

verschiedene Zeichen.

- b) Analog haben wir für ein Zeichen der Länge  $i$  genau  $2^i$  Möglichkeiten. Somit gibt es genau

$$\sum_{i=0}^5 2^i = 2^6 - 1 = 63$$

Möglichkeiten, Zeichen mit maximal 5 Elementen zu bilden (inklusive leeres Zeichen).

#### Aufgabe 3

In der Umgebung eines Erholungsortes sollen Wanderwege durch je zwei farbige, parallele Striche gekennzeichnet werden, wobei ein Wanderweg auch 2 mal mit der gleichen Farbe gekennzeichnet werden kann und die Farbenreihenfolge keine Rolle spielt.

Wie viele Farben werden mindestens benötigt um 15 Wanderwege eindeutig zu kennzeichnen?

Lösung: Gesucht ist die minimale Anzahl an Farben, die benötigt werden, um 15 verschiedene Wanderwege zu beschreiben. Dabei soll jeder Weg eine andere Farbkombination besitzen. Diese dürfen jeweils aus zwei verschiedenen Farben oder zwei mal der gleichen Farbe bestehen. Dieses Problem

entspricht zweifachem Ziehen aus  $n$  Farben mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge. Laut Folie 111 gibt es dann

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+1}{2}$$

Möglichkeiten Wanderwege zu kennzeichnen.

Wir müssen nun  $n$  so groß wählen, dass dieser Term mindestens 15 ist. Es gilt

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2} = \sum_{i=1}^n i \stackrel{!}{\geq} 15.$$

Somit ist unser gesuchtes  $n = 5$ . Tatsächlich kommt man mit 5 Farben genau auf 15 Kombinationen.

Alternative Überlegung: Wir überlegen uns zunächst, wie viele Kombinationsmöglichkeiten es gibt, aus  $n$  Farben zwei Farben auszuwählen. Wir können das Problem folgendermaßen beschreiben: Wir kodieren mit | eine gewählte Farbe und unterscheiden die verschiedenen Farben mit \*. Zum Beispiel entspricht die Notation |\*\*|\* dem Fall, einmal die erste Farbe und einmal die dritte Farbe gewählt zu haben und kein mal die Farben zwei und vier. Den Fall zweier gleichen Farben beschreiben wir z.B. durch \*\*||\*\*. Wir haben allgemein für  $n$  Farben  $n - 1$  Sterne (welche die verschiedenen Klassen trennen) und genau zwei Striche, insgesamt also  $n+1$  Symbole. Wir erhalten die Anzahl der möglichen Kombinationen durch Platzieren von  $n - 1$  Sternen auf  $n + 1$  Plätze und anschließendes Auffüllen der zwei verbleibenden Plätze mit Strichen. Somit gibt es

$$\binom{n+1}{n-1} \cdot \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2}$$

Möglichkeiten.

#### **Aufgabe 4**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im Lotto "6 aus 49" mit einem einzelnen Tippschein

a) einen "Sechser",    b) einen "Fünfer",    c) einen "Vierer",    d) einen "Dreier",

e) mindestens einen "Dreier" zu erzielen?

f) Wie viele Scheine muss man ankreuzen, um mindestens einen "Fünfer" zu haben?

Lösung: Wir bestimmen im Folgenden jeweils die Anzahl der möglichen sowie die Anzahl der günstigen Kombinationen. Die Anzahl der Möglichen Zahlenkombinationen erhalten wir über den Binomialkoeffizienten, wir wählen aus 49 Elementen genau 6:

$$\# \text{ mögliche Kombis} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13.983.816.$$

a) Für einen Sechser müssen alle 6 Zahlen richtig sein, dafür gibt es nur genau eine Möglichkeit, denn

$$\# \text{ günstige Kombis} = \binom{6}{6} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} = 1.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}(\text{Sechser}) = \frac{1}{13.983.816}.$$

b) Für einen Fünfer müssen genau 5 Zahlen richtig sein und die letzte Zahl falsch. Wegen

$$\# \text{ günstige Kombis} = \underbrace{\binom{6}{5}}_{5 \text{ Richtige}} \cdot \underbrace{\binom{43}{1}}_{1 \text{ Falsche}} = 6 \cdot 43 = 258$$

gilt

$$\mathbb{P}(\text{Fünfer}) = \frac{258}{13.983.816} \approx \frac{1}{54200}.$$

c) Für einen Vierer müssen vier Zahlen richtig und zwei Zahlen falsch sein, ergo

$$\# \text{ günstige Kombis} = \underbrace{\binom{6}{4}}_{4 \text{ Richtige}} \cdot \underbrace{\binom{43}{2}}_{2 \text{ Falsche}} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{43!}{2! \cdot 41!} = 13.545,$$

folglich gilt

$$\mathbb{P}(\text{Vierer}) = \frac{13.545}{13.983.816} \approx \frac{1}{1032}.$$

d) Analog gilt

$$\mathbb{P}(\text{Dreier}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{13.983.816} = \frac{246.820}{13.983.816} \approx \frac{1}{57}.$$

e) Hier ist sowohl Dreier, Vierer, Fünfer als auch ein Sechser günstig. Da die Ereignisse disjunkt sind, können wir die Wahrscheinlichkeiten einfach addieren:

$$\mathbb{P}(\text{mind. ein Dreier}) = \frac{1 + 258 + 13.545 + 246.820}{13.983.816} = \frac{260.624}{13.983.816}.$$

f) Wir wollen sicher mindestens einen Fünfer haben. Im schlimmsten Fall kreuzen wir erst alle Falschen Kombinationen an, anschließend muss der nächste Schein ein Fünfer oder Sechser sein. Der Einfachheit halber berechnen wir die Anzahl der ungünstigen Fälle als Differenz der möglichen und günstigen Fälle bestimmen. Wir Anzahl der benötigten Scheine ergibt sich also zu

$$\underbrace{13.983.816}_{\text{alle Kombinationen}} - \underbrace{1}_{\text{Sechser}} - \underbrace{258}_{\text{Fünfer}} + \underbrace{1}_{\text{Gewinnerschein}} = 13.983.558.$$

## Aufgabe 5

Beim Werfen eines Würfels bedeutet  $A$  das Ereignis, eine "Sechs" zu werfen und  $B$  das Ereignis, eine gerade Augenzahl zu werfen.

a) Welche Bedeutung haben die Ereignisse  $A^c \cap B$  und  $(A \cup B)^c$  ?

b) Zeige, dass die Ereignisse  $A$ ,  $A^c \cap B$  und  $(A \cup B)^c$  eine Zerlegung des Ereignisraumes bilden.

Lösung:

a) Die beiden Ereignisse lauten

$$A = \{6\}, \quad B = \{2, 4, 6\}.$$

Somit entspricht

$$A^c \cap B = \{2, 4\}$$

dem Ereignis, eine gerade Zahl zu werfen, die allerdings keine Sechs ist. Weiter ist das Ereignis

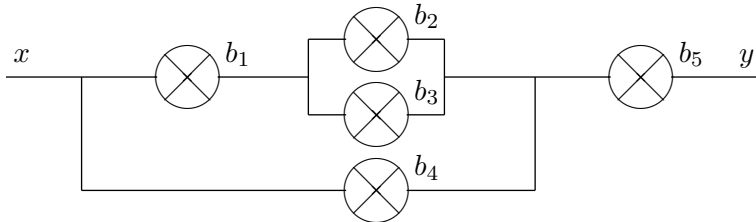
$$(A \cup B)^c = B^c = \{1, 3, 5\}$$

die Menge aller ungeraden Ergebnisse.

- b) Eine Zerlegung ist eine Menge von disjunkten Ereignissen, deren Vereinigung den gesamten Ereignisraum ergibt. Offensichtlich sind die drei Ereignisse disjunkt und deren Vereinigung ergibt  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , was alle möglichen Ergebnisse beim Würfelwurf enthält.

### Aufgabe 6

In der abgebildeten Schaltung



seien die Elemente  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) Glühlampen. Es bedeute das Ereignis  $B_i$  : zufällig ist Glühlampe  $b_i$  defekt. Man beschreibe folgende Ereignisse:

A: zufällig ist kein Stromfluss von  $x$  nach  $y$  möglich

B: zufällig ist Stromfluss von  $x$  nach  $y$  möglich.

Lösung:

A: Für den Fall, dass kein Strom fließen kann, ist es notwendig, dass auf allen möglichen Wegen von  $x$  nach  $y$  eine Glühbirne unterbrochen ist. Das ist der Fall, falls  $b_5$  defekt ist oder wenn beide der parallelgeschalteten Stromflüsse unterbrochen sind. Für letzteres muss sowohl  $b_4$  als auch wahlweise  $b_1$  oder das Paar  $b_2, b_3$  defekt sein. Somit lässt sich das Ereignis durch

$$\{[B_1 \cup (B_2 \cap B_3)] \cap B_4\} \cup B_5$$

beschreiben.

B: Für einen intakten Stromfluss muss es einen intakten Weg geben. Dafür ist es notwendig, dass  $b_5$  nicht defekt ist. Weiter muss einer der beiden parallelen Wege intakt sein. Mit analogen Überlegungen oder Komplementbildung des obiges Ereignisses erhalten wir

$$\{[B_1^c \cap (B_2^c \cup B_3^c)] \cup B_4^c\} \cap B_5^c.$$