

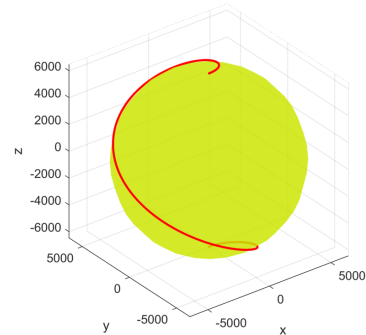
Mathematik III (für IF, ET, Ph)
Wintersemester 2023/24

7. Übung: Kurven- und Oberflächenintegrale

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie eine Flugbahnkurve vom Nord- zum Südpol, bei der Sie die Erde einmal in West-Ost-Richtung umrunden. An welcher Stelle ist das skalare Wegelement bzw. die Ableitung der Bahnkurve maximal?

Hinweis: Wir nehmen den Erdradius mit 6400km an und den Erdmittelpunkt als $(0, 0, 0)^T$.



- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \pi \cos 2t \\ \pi \sin 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Hinweis: Es gilt $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \operatorname{arsinh}(x)$.

Aufgabe 2

- (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hierbei ist $a > 0$ zu wählen. (Anm.: Es handelt sich um den Viertelbogen einer Astroide.)

- (b) Berechnen Sie das Integral der Funktion $\mathbf{F}(x, y) = [0, y]^T$ längs des Astroidenbogens aus Aufgabe (a) auf direktem Wege.
- (c) Bestätigen Sie mit der Integrierbarkeitsbedingung, dass es sich bei \mathbf{F} um ein Potentialfeld handelt und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential (d. h. eine Stammfunktion).
- (d) Bestimmen Sie das Integral aus Teil (b) mit diesen Erkenntnissen erneut.
- (e) Was ist der Wert des entsprechenden Arbeitsintegrals $\int \mathbf{F}(x) dx$ längs der geradlinigen Verbindung vom Anfangs- zum Endpunkt des Astroidenbogens?

Aufgabe 3

Man berechne das Arbeitsintegral über $\mathbf{F}(x, y) = [xy^2, x^2 - y^2]^T$ entlang des Weges $y^2 = 3x$ von $(0, 0)$ nach $(3, 3)$ sowie entlang des Streckenzugs von $(0, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 3)$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Vektorfelder, ob diese Potentialfelder sind und geben Sie ggf. die Potentialfunktion an:

$$(a) \mathbf{F}(x, y, z) = [1, 1, 1]^\top, \quad (b) \mathbf{F}(x, y, z) = [2x, 2y, 0]^\top, \quad (c) \mathbf{F}(x, y, z) = [yz, xz, x^2]^\top.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel mit Radius $r > 0$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

und das Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y^2 = z; x, y \in [-1, 1]\}$$

den gleichen Oberflächeninhalt besitzen.