
Mathematik 1 - WS2022/23

Übungsblatt 4

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens (Σ).

(a) $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{100}$

(b) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + 10x^9$

(d) $(2y)^{\frac{1}{2}} + (4y)^{\frac{1}{3}} + (6y)^{\frac{1}{4}} + \dots + (50y)^{\frac{1}{26}}$

Aufgabe 2: Transformieren Sie den Index k in

$$\sum_{k=6}^{12} \frac{1}{3+k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{21} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{24} \frac{1}{k-2} \quad (1)$$

so dass (jeweils)

(a) von $i = 1$ ab summiert wird,

(b) über $\frac{1}{m}$ summiert wird.

Berechnen Sie ferner die in (1) aufgeführte Differenz.

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie die Rekursionsformel für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Nutzen Sie dafür die Definition über Fakultäten.

(b) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der vollständigen Induktion und der Rekursionsformel aus (a).

Aufgabe 4:

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Aufgabe 5: Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen und Betragsungleichungen.

(a) $|5x - 9| = 4$

(d) $|2x - 4| < 2 - x$

(b) $|5 - 7x| + |2x| = 10 - x$

(e) $|x + 2| + |x - 2| \geq 6$

(c) $2|x - 1| - |x - 3| = 3x - 5$

(f) $x^2 - |x - 2| \cdot |x + 6| \leq 4$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die arithmetischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen z

(a) $z = \frac{3 + 4i}{5} + \frac{5}{3 + 4i}$

(b) $z = \frac{1 + i}{1 - i} + \frac{4i}{1 + i} + 1$

(c) $z = \frac{(2 + i)^3}{2 - 3i}$

(d) $z = \frac{3 + 6i}{2 + i^3} - \frac{10i^4}{(1 + i)^2}$

worin i mit $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

Anmerkung: Die in der Aufgabe benannte arithmetische Darstellung entspricht der Bezeichnung *kartesische Darstellung* aus der Vorlesung.

Aufgabe 7:

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

$z_1 = 3 - 4i$

$z_2 = -2 + 3i$

$z_3 = -5 - 2i$

$z_4 = 3$

$z_5 = -\frac{3}{2}i$

$z_6 = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)i \right)$

$z_7 = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)i$

$z_8 = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)i$

(b) Bestimmen Sie in der Gaußschen Zahlenebene (siehe Abbildung 1) die durch Zeiger dargestellten komplexen Zahlen.

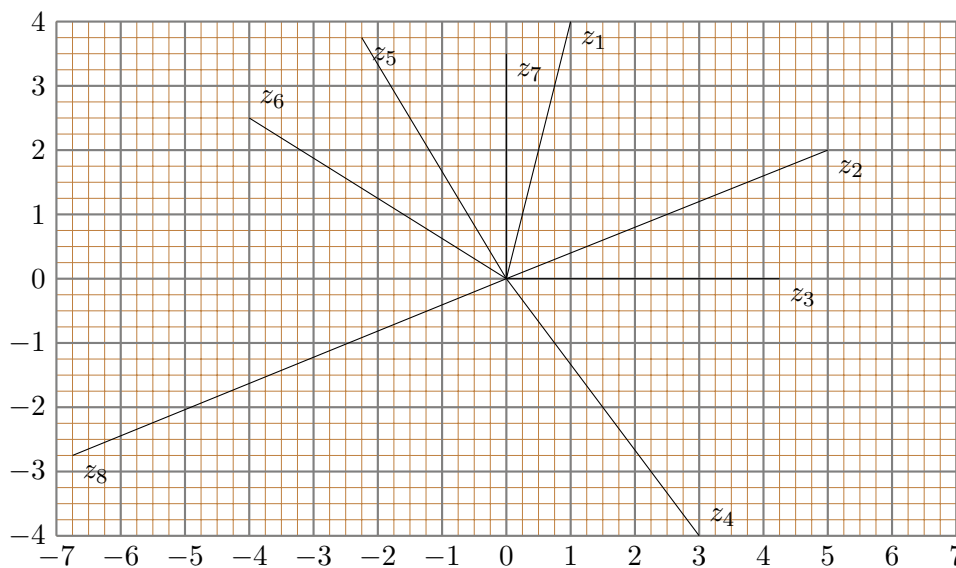


Abbildung 1: Komplexe Zahlen $z_i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1; 2; \dots; 8\}$, die durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt sind. (Die Pfeilspitzen liegen auf dem Gitterraster.)

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 8: Verwenden Sie die Gaußschen Summenformel $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$, um folgende Summen zu berechnen:

(a) $\sum_{k=1}^n 2k$

(b) $\sum_{k=1}^n (2k+1)$

(c) $\sum_{k=1}^5 \sum_{i=1}^6 k$

(d) $\sum_{k=1}^6 \sum_{i=1}^5 (i-k)$

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Lösungsmengen ($x \in \mathbb{R}$) der folgenden Betragsungleichungen und geben Sie diese in Intervallschreibweise an.

(a) $|x-1| + |x+5| \leq 4$

(b) $|2x-4| - 2 \cdot |x-5| > 2$

Aufgabe 10: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 11: Formen Sie in Quotienten mit rationalen Nennern um.

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \quad \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}, \quad \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{für } a \in [0, \infty), b \in [0, \infty) \text{ mit } a \neq b$$