

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

2. Übung: Vektorfolgen und Stetigkeit (Lösungen)

Aufgabe 1Konvergieren die gegebenen Vektorfolgen für $n \rightarrow \infty$? Wenn ja, wie lautet jeweils der Grenzwert?

$$\mathbf{a}^{(n)} = \left(\frac{1}{n!}, \sqrt{n^2 - 1} - n \right)^\top, \quad \mathbf{b}^{(n)} = \left(2^n, \frac{1}{n}, 1 \right)^\top,$$

$$\mathbf{c}^{(n)} = \left(\frac{\sin(n)}{n}, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^\top, \quad \mathbf{d}^{(n)} = \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+5}{n-1} \right)^\top.$$

Lösung:

$$\mathbf{a}^{(n)} \rightarrow (0, 0)^\top \quad \sqrt{n^2 - 1} - n = \frac{-1}{\sqrt{n^2 - 1} + n}$$

$\mathbf{b}^{(n)}$ konvergiert nicht, da $2^n \rightarrow \infty$

$\mathbf{c}^{(n)} \rightarrow (0, e)^\top$ bekannte Grenzwerte (siehe 1. Semester)

$\mathbf{d}^{(n)} \rightarrow (2, 1)^\top$ siehe 1. Semester

Aufgabe 2Gegeben ist eine Folge von Vektoren $\mathbf{d}^{(n)} \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\mathbf{d}^{(n+2)} = \mathbf{d}^{(n)} \times \mathbf{d}^{(n+1)}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{e}_2,$$

wobei \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ die Einheitsvektoren bezeichnen.

- (a) Konvergiert diese für $n \rightarrow \infty$?
- (b) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn man $\mathbf{d}^{(2)} = 0.5 \mathbf{e}_2$ setzt?

Lösung:

- (a) Es gilt nach der Regel fürs Kreuzprodukt:

$$\mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{d}^{(4)} = \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{d}^{(5)} = \mathbf{e}_2$$

Damit ist die Vektorfolge periodisch und ist damit divergent.

- (b) In (a) waren die Startvektoren senkrecht aufeinander und hatten die Länge 1. Nach der Definition des Kreuzproduktes hatten dann auch alle folgenden Vektoren die Länge eins. Jetzt hat der zweite Vektor $\mathbf{d}^{(2)}$ die Länge 0.5, was dazu führt, dass $\mathbf{d}^{(3)}$ die Länge 0.5 und $\mathbf{d}^{(4)}$ die Länge 0.25 hat. Dies setzt sich so fort und bedeutet, dass die Vektoren $\mathbf{d}^{(n)}$ zwar immer noch in Richtung der Einheitsvektoren zeigen, aber deren Länge gegen Null geht. Damit konvergiert diese Vektorfolge gegen den Nullvektor.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Vektorfolge

$$\mathbf{a}^{(n+1)} = P\mathbf{a}^{(n)}, \quad \mathbf{a}^{(1)} = (-1, 1)^\top, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte von P und geben Sie eine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren an.
- Stellen Sie $\mathbf{a}^{(1)}$ bzgl. dieser Basis dar.
- Was bewirkt eine Multiplikation von P mit $\mathbf{a}^{(1)}$? Was bedeutet das für die Konvergenz und den Grenzwert der Vektorfolge $\mathbf{a}^{(n)}$?
- Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn $\mathbf{a}^{(1)} = (1, 2)^\top$ gewählt wird?

Lösung:

- Das charakteristische Polynom ist $\det(\lambda I - P) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. zu diesen Eigenwerten kann gehören die Eigenvektoren $\mathbf{x}_1 = (-1, 1)^\top$ und $\mathbf{x}_2 = (1, 1)^\top$.
- Es gilt offensichtlich $\mathbf{a}^{(1)} = 1 * \mathbf{x}_1 + 0 * \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$.
- Also gilt

$$\mathbf{a}^{(2)} = P\mathbf{a}^{(1)} = P\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{(1)}.$$

Damit handelt sich also bei dieser Vektorfolge um eine konstante Folge, die damit gegen $\mathbf{a}^{(1)}$ konvergiert.

- Hier gilt

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{x}_2.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{a}^{(n+1)} = P\mathbf{a}^{(n)} = \dots = P^{n-1}\mathbf{a}^{(1)} = 1^n \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + 2^n \frac{3}{2}\mathbf{x}_2$$

Da der Faktor 2^n divergiert, divergiert auch die Vektorfolge.

Aufgabe 4

Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen:

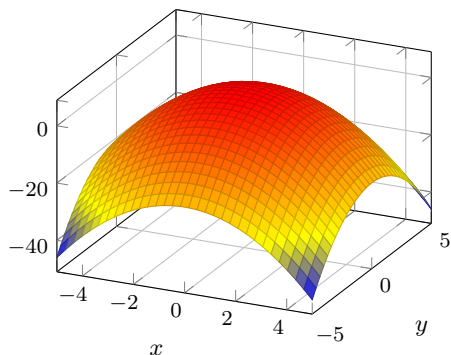
$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Welche Form haben die Höhenlinien? Geben Sie zusätzlich jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie den maximalen Wertebereich an.

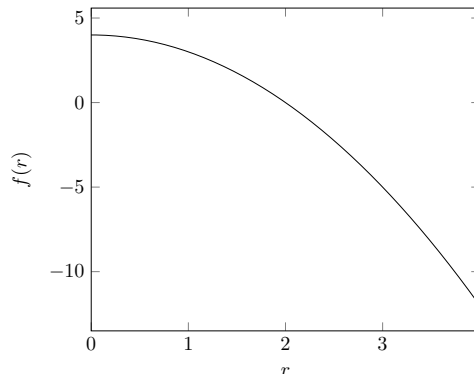
Lösung: Allgemein: Darstellung als eindimensionale Funktion abhängig vom Radius. Niveaulinien sind Kreise, da es sich um rotationssymmetrische Funktionen handelt.

- $D(f) = \mathbb{R}^2$, $W(f) = (-\infty, 4]$

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - \|\mathbf{x}\|^2$$

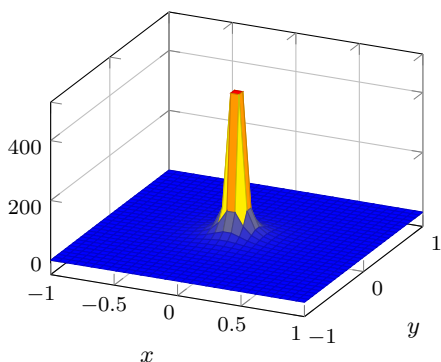


$$f(r) = 4 - r^2$$

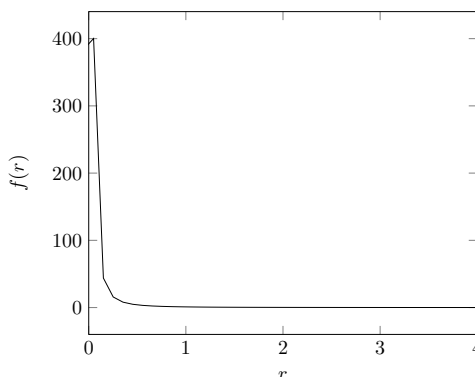


(b) $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $W(f) = (0, \infty)$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$



$$f(r) = \frac{1}{r^2}$$



Aufgabe 5

Wir betrachten Funktionen

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$.

Zeigen Sie jeweils, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

existieren, aber nicht

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Lösung:

(a) Aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

folgt die Existenz der iterierten Grenzwerte. Würde zusätzlich $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existieren, so müsste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

gelten. Da aber die iterierten Grenzwerte verschieden sind, ist das nicht möglich.

(b) Wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Jedoch gilt auf der Geraden $y = x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + (x-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1 \neq 0.$$

Also kann $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nicht existieren.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } x^4 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x^4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

in $(0, 0)$ stetig längs jeder Halbgeraden $x = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)^T$, mit $t \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ fest, ist, jedoch bezüglich ihres ganzen Definitionsbereiches in $(0, 0)$ nicht stetig sein kann.

Lösung: Betrachten wir die Halbgerade, also $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $t \geq 0$, so können wir die Funktion als

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

schreiben. Es gibt nun 3 Möglichkeiten:

- $\cos^2 \alpha = 0$, $\sin^2 \alpha = 1$:

$$f_\alpha(t) = \frac{0}{t^2} = 0 \quad \forall t > 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} f_\alpha(t) = 0.$$

- $\sin^2 \alpha = 0 = \sin \alpha$, $\cos^2 \alpha = 1$:

$$f_\alpha(t) = \frac{0}{t^4} = 0 \quad \forall t > 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} f_\alpha(t) = 0.$$

- $\sin^2 \alpha \neq 0$, $\cos^2 \alpha \neq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_\alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{0}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

Da auch $f_\alpha(0) = 0$ ist, liegt also jeweils Stetigkeit entlang der Halbgeraden im Nullpunkt ($t = 0$) vor. Unstetigkeit von f im Punkt $(0, 0)$ folgt aus der Betrachtung von f über der Kurve $y = x^2$. Denn es gilt

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Stetigkeit der Funktion im Nullpunkt, da

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0,$$

für beliebige Folgen $(x_n, y_n) \in D(f)$, mit $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ erfüllt sein müsste.