TU Bergakademie Freiberg
Dr. M. Winkler

Freiberg, 18. Oktober 2024
Abgabe am 1. November 2024

Optimierung für Mathematiker/innen
Übung 2

Aufgabe 7: Interaktives Matlab– Tutorial

Laden Sie die Datei `tutorial.m` von der Hompage zur Vorlesung herunter und starten Sie Matlab. Tippen Sie `echodemo tutorial` in das Command Window und lassen Sie sich durch das interaktive Tutorial führen.

Aufgabe 8: Implementierung der Himmelblau-Funktion

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der *Himmelblau*-Funktion

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2 - 11\right)^2 + \left(x_1 + x_2^2 - 7\right)^2.$$

Implementieren Sie diese Funktion in `himmelblau.m`. Erstellen Sie Plots (`surf` und `contour`) im Bereich $[-6, 6] \times [-6, 6]$. Die Funktion `meshgrid` könnte hilfreich sein.

Aufgabe 9: Standortoptimierung

Der Standort einer Rettungswache mit Hubschrauber soll geplant werden. Sie soll m Ortschaften versorgen. Maß für die Güte eines Standorts ist die gewichtete Summe der Abstände des Standorts zu den Ortschaften (je kleiner der Abstand, desto besser). Dabei sind die Gewichte der Ortschaften proportional zu ihrer jeweiligen Bevölkerungszahl.

(a) Stelle eine passende Optimierungsaufgabe dazu auf.

(b) Programmiere die zugehörige Zielfunktion, und bestimme den optimalen Standort der Rettungswache mit Hilfe der Matlab-Funktion `fminunc`. Dabei seien die 5 folgenden Ortschaften im x-y-Koordinatensystem gegeben:

Position	(1,1)	(2,7)	(4,5)	(6,8)	(9,7)
Bevölkerung	5000	3000	1000	4000	2000

(c) Es sei zusätzlich gefordert, dass sich der Landeplatz innerhalb des Kreissektors $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 16\}$ befinden soll. Erweitern Sie ihr Matlab-Programm, so dass diese Nebenbedingung eingehalten wird. Nutzen Sie dafür die Funktion `fmincon`.

(d) Durch welche Gegebenheiten stößt die Optimierungsaufgabe an ihre Grenzen? Welche Phänomene werden außer Acht gelassen? Wie könnte eine realistischere Aufgabenstellung (evtl. mit Beschränkungen) aussehen?

Aufgabe 10: Projektionsaufgabe

Die (orthogonale) Projektion eines Punktes $p \in \mathbb{R}^m$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^m$ mit $C \neq \emptyset$ ist der Punkt $\hat{x} \in C$, welcher das Optimierungsproblem

$$\min \|x - p\| \quad \text{über } x \in C$$

löst ($\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm).

(a) Zeige, dass die Projektion wohldefiniert ist (und somit eine Funktion $\mathrm{proj}_C(\cdot) : \mathbb{R}^m \to C$ definiert).

(b) Bestimme eine explizite Formel für die Projektion auf einen linearen Unterraum, der durch $\{A^T y : y \in \mathbb{R}^n\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($n \leq m$, voller Zeilenrang) gegeben ist.
Hinweis: Betrachte das Optimierungsproblem $\min \frac{1}{2}\|A^T y - p\|^2$.
Warum darf man hier das Quadrat der Zielfunktion verwenden?

Hinweis: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit $x, y \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ auch $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ liegt.

Hausaufgabe 4: Bestimmung von Extrempunkten in Abhängigkeit von c

Bestimmen Sie die Extrempunkte von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4c^2 xy$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Erstellen Sie für ausgewählte Parameter c einen Plot der Zielfunktion (z. B. in Matlab mit Höhenlinien).

Hausaufgabe 5: Beispiel: Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung sind nicht hinreichend

Besitzt die Funktion $f(x) = (x_1 - x_2^2)(2x_1 - x_2^2)$ im Punkt $x^* = (0,0)$ ein lokales Minimum? Begründe deine Antwort.