Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Theorie für *gedämpfte* Schwingungen von durch ideale Federn gekoppelten Massenpunkten in Analogie zu Abschnitt 10.2 im Skript. Die Massenpunkte sollen alle dieselbe Masse haben, d.h. $\mu_{ij} = \mu\,\delta_{ij}$, die Federkonstanten κ_{ij} seien beliebig. Zusätzlich nehmen wir Stokessche Reibung mit dem (hinreichend kleinen) Reibungskoeffizient α für alle Massenpunkte an.

(a) Stellen Sie die verallgemeinerten Lagrange-Gleichungen auf.

(b) Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$q_j = a_j e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \quad \text{mit } \gamma = \frac{\alpha}{2\mu}.$$

Diskutieren Sie die Eigenschaften der Normalschwingungen.

(a) 6 starre Translations und Rotationsfreiheitsgrade

$\Rightarrow$ $S = 3N - 6$ Schwingungsfreiheitsgrade

("Anzahl d. Auslenkungen")

$\rightarrow$ kin. Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{S} \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gleiche} \\ \text{Massen}}}{=} \frac{\mu}{2} \sum_i \dot{q}_i^2$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} \kappa_{ij} q_i q_j$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{\mu}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} \kappa_{ij} q_i q_j$$

Verallg. Lagrange-Glg.:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

mit Rayleighscher Dissipationsfkt. (Stokessche Reibung)

$$P = \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{q}_i + \sum_j \varkappa_{ij} q_j + \alpha \dot{q}_i = 0}$$

(b) Ansatz:

$$q_j = a_j e^{-\gamma t} e^{i\omega t}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2\mu}$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \left(-\mu\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4\mu}\right) a_i + \sum_j \varkappa_{ij} a_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overleftrightarrow{\varkappa}\,\vec{a} = \left(\mu\omega^2 + \frac{\alpha^2}{4\mu}\right)\vec{a}}$$

Eigenwertgleichung für $\overleftrightarrow{\varkappa}$

Diagonalisierung von $\overleftrightarrow{\varkappa}$ liefert s Eigenwerte $\lambda_\alpha = \mu\omega_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4\mu}$ und entspr. Eigenvektoren $\vec{a}_\alpha$

Eigenfrequenzen: $\omega_\alpha = \pm\sqrt{\frac{\lambda_\alpha}{\mu} - \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}$

$$\Rightarrow \text{allg. Lsg: } q_i(t) = e^{-\gamma t}\cdot \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\left(\underline{C_\alpha^+} e^{i\omega_\alpha t} + \underline{C_\alpha^-} e^{-i\omega_\alpha t}\right)$$

2S Integrationskonstanten