

## Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

### 6. Übung: Integralrechnung (Lösungen)

#### Aufgabe 1

Ein Flugzeughangar hat eine rechteckige Grundfläche  $D := [0, 6] \times [0, 3]$  und seine Dachform kann durch die Funktion

$$f(x, y) = y(x - 3)^2 + \exp(x - y), \quad (x, y) \in D,$$

beschrieben werden. Berechnen Sie das Volumen des Hangars.

Lösung:

Das Volumen  $V$  beträgt

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 \int_0^3 y(x - 3)^2 + \exp(x - y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^6 \int_0^3 y(x - 3)^2 \, dy \, dx + \int_0^6 \int_0^3 \exp(x - y) \, dy \, dx \\ &=: V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen das erste Volumen

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^6 \int_0^3 y(x - 3)^2 \, dy \, dx = \int_0^6 (x - 3)^2 \int_0^3 y \, dy \, dx \\ &= \int_0^6 (x - 3)^2 \, dx \int_0^3 y \, dy = \left[ \frac{(x - 3)^3}{3} \Big|_0^6 \right] \left[ \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right] \\ &= \frac{3^3 + 3^3}{3} \frac{3^2}{2} = 81 \end{aligned}$$

und das zweite Volumen

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^6 \left( \int_0^3 \exp(x - y) \, dy \right) \, dx = \int_0^6 \left[ -\exp(x - y) \Big|_0^3 \right] \, dx \\ &= \int_0^6 \exp(x) - \exp(x - 3) \, dx = \exp(x) \Big|_0^6 - \exp(x - 3) \Big|_0^6 \\ &= e^6 - 1 - e^3 + e^{-3} \end{aligned}$$

also

$$V = 80 + e^6 - e^3 + e^{-3}.$$

#### Aufgabe 2

Skizzieren Sie den Normalbereich

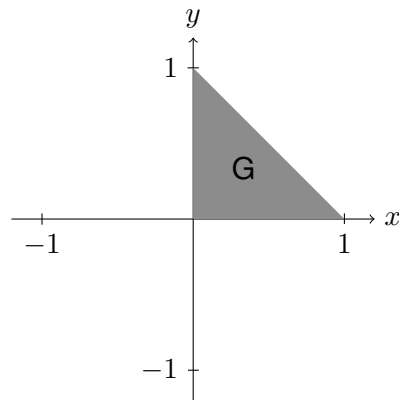
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}.$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_G xy(1 - x) \, dx \, dy.$$

Lösung:

(a)



(b) Man kann  $G$  folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ 0 &\leq x \leq 1 - y \end{aligned}$$

Demnach gilt also:

$$\begin{aligned} I &= \int_G xy(1-x) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y(x-x^2) dx dy \\ &= \int_0^1 y \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1-y} dy = \int_0^1 y \left( \frac{(1-y)^2}{2} - \frac{(1-y)^3}{3} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{6} - \frac{y^3}{2} + \frac{y^4}{3} dy = \left[ \frac{y^2}{12} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} \right]_0^1 = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt des homogenen Körpers, der durch die Flächen

$$z + x + y = a \quad (a > 0), \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$$

begrenzt wird.

Lösung:

Der Körper kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq a \\ 0 &\leq y \leq a - z \\ 0 &\leq x \leq a - z - y \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-z-y} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^{a-z} (a-z) - y \, dy \, dz = \int_0^a (a-z)^2 - \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-z} dz \\ &= \int_0^a \frac{(a-z)^2}{2} dz = \left[ -\frac{(a-z)^3}{6} \right]_0^a = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

Alternativ kann man das Volumen auch über die Formel für das Volumen einer Pyramide berechnen. Für die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes gilt:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{1}{V} \int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-z-y} x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{V} \int_0^a \int_0^{a-z} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-z-y} dy \, dz = \frac{1}{V} \int_0^a \int_0^{a-z} \frac{(a-z-y)^2}{2} dy \, dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a \left[ -\frac{(a-z-y)^3}{6} \right]_0^{a-z} dz = \frac{1}{V} \int_0^a \frac{(a-z)^3}{6} dz = \frac{6}{a^3} \left[ -\frac{(a-z)^4}{24} \right]_0^a = \frac{6}{a^3} \frac{a^4}{24} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss  $s_x = s_y = s_z$  gelten. Alternativ kann man die entsprechenden Volumenintegral analog berechnen. Der gegebene Körper besitzt also das Volumen  $a^3/6$  und den Schwerpunkt  $[a/4 \ a/4 \ a/4]^T$ .

#### **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_G (x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus [0, 1]^2.$$

Verwenden Sie dabei auch Polarkoordinaten.

Lösung:

Das Gebiet  $G$  ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius  $\sqrt{2}$  ohne das Einheitsquadrat. D.h., wir erhalten

$$\int_G (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_{\tilde{G}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy - \int_{[0,1]^2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

wobei  $\tilde{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Für das erste Integral können wir nun Polarkoordinaten,  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , nutzen:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{G}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi) r \, d\phi \, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \, d\phi \, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi \, dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \, dr = 2\pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist wie in Aufgabe 1 berechenbar:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx \, dy + \int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 y^2 \, dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \, dx = 2 \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\int_G (x^2 + y^2) \, dx \, dy = 2\pi - \frac{2}{3}.$$

## Aufgabe 5

Gegeben ist eine Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

Berechnen Sie die Fläche der Ellipse sowie das Integral

$$\int_E xy^2 \, dx \, dy.$$

*Hinweis:* Führen Sie dazu das Integral über  $E$  durch eine Transformation auf ein Integral auf dem Einheitskreis zurück und nutzen Sie anschließend Polarkoordinaten.

Lösung:

Wir betrachten die Transformation  $\Phi(x, y) = (ax, by)$ . Damit folgt für  $(x, y) \in G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , dass

$$\frac{\Phi_1(x, y)}{a^2} + \frac{\Phi_2(x, y)}{b^2} = x^2 + y^2 \leq 1,$$

insbesondere ist  $\Phi$  eine Bijektion von  $G$  in  $E$  mit

$$\det(\Phi'(x, y)) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \neq 0.$$

Es folgt mit dem Transformationssatz

$$\int_E 1 \, dx \, dy = \int_G ab \, dx \, dy = ab\pi$$

sowie mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_E xy^2 \, dx \, dy &= \int_G \Phi_1(x, y) \Phi_2(x, y)^2 |\det(\Phi'(x, y))| \, dx \, dy = \int_G ax (by)^2 ab \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} ar \cos \phi (br \sin \phi)^2 abr \, d\phi \, dr = a^2 b^3 \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi. \end{aligned}$$

Wir betrachten das zweite Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi$$

und erhalten mit der univariaten Substitution  $t = \sin \phi$ ,  $\frac{dt}{d\phi} = \cos \phi$  (Bemerkung: Dies ist eine Bijektion auf beiden Teilintervallen.)

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi = \int_{-1}^1 t^2 \, dt + \int_1^{-1} t^2 \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt - \int_{-1}^1 t^2 \, dt = 0.$$

Folglich gilt  $\int_E xy^2 \, dx \, dy = 0$ .