

Mathematik III (für IF, ET, Ph)
Wintersemester 2023/24

2. Übung: Vektorfolgen und Stetigkeit

Aufgabe 1

Konvergieren die gegebenen Vektorfolgen für $n \rightarrow \infty$? Wenn ja, wie lautet jeweils der Grenzwert?

$$\mathbf{a}^{(n)} = \left(\frac{1}{n!}, \sqrt{n^2 - 1} - n \right)^\top, \quad \mathbf{b}^{(n)} = \left(2^n, \frac{1}{n}, 1 \right)^\top, \\ \mathbf{c}^{(n)} = \left(\frac{\sin(n)}{n}, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^\top, \quad \mathbf{d}^{(n)} = \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+5}{n-1} \right)^\top.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist eine Folge von Vektoren $\mathbf{d}^{(n)} \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\mathbf{d}^{(n+2)} = \mathbf{d}^{(n)} \times \mathbf{d}^{(n+1)}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{e}_2,$$

wobei \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ die Einheitsvektoren bezeichnen.

- (a) Konvergiert diese für $n \rightarrow \infty$?
- (b) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn man $\mathbf{d}^{(2)} = 0.5 \mathbf{e}_2$ setzt?

Aufgabe 3

Wir betrachten die Vektorfolge

$$\mathbf{a}^{(n+1)} = P \mathbf{a}^{(n)}, \quad \mathbf{a}^{(1)} = (-1, 1)^\top, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von P und geben Sie eine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren an.
- (b) Stellen Sie $\mathbf{a}^{(1)}$ bzgl. dieser Basis dar.
- (c) Was bewirkt eine Multiplikation von P mit $\mathbf{a}^{(1)}$? Was bedeutet das für die Konvergenz und den Grenzwert der Vektorfolge $\mathbf{a}^{(n)}$?
- (d) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn $\mathbf{a}^{(1)} = (1, 2)^\top$ gewählt wird?

Aufgabe 4

Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen:

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Welche Form haben die Höhenlinien? Geben Sie zusätzlich jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie den maximalen Wertebereich an.

Aufgabe 5

Wir betrachten Funktionen

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$.

Zeigen Sie jeweils, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

existieren, aber nicht

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } x^4 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x^4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

in $(0, 0)$ stetig längs jeder Halbgeraden $\mathbf{x} = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)^T$, mit $t \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ fest, ist, jedoch bezüglich ihres ganzen Definitionsbereiches in $(0, 0)$ nicht stetig sein kann.