

## Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

### 4. Übung: Totales Differential und vektorwertige Funktionen

#### Aufgabe 1

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen das totale Differential:

(a)  $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,      (b)  $f(x, y, z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$ .

#### Aufgabe 2

In einem Experiment wird aus einer Messung von Spannung  $U$  und Stromstärke  $I$  ein Widerstand mit dem Ohmschen Gesetz  $R = \frac{U}{I}$  berechnet. Wie hängt der relative Fehler des Widerstands mit den relativen Fehlern von Spannung und Stromstärke zusammen?

#### Aufgabe 3

Gegeben sei die *Cobb-Douglas Produktionsfunktion*

$$y(p_1, p_2) = 9p_1^{2/3} p_2^{1/3}.$$

Schätzen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die Änderung des Produktionswertes, wenn man  $p_1 = 27$  um eine Einheit verringert und  $p_2 = 8$  um zwei Einheiten vergrößert, nach oben ab. Vergleichen Sie den Wert mit dem exakten Änderungswert.

#### Aufgabe 4

Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit  $r_1 = (30 \pm 1) \text{ mm}$ ,  $r_2 = (60 \pm 1) \text{ mm}$  sowie die Höhe mit  $h = (50 \pm 0,2) \text{ mm}$  gemessen.

Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des Kegelstumpfvolumens nach der Formel

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

#### Aufgabe 5

Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines geraden Kreiszyinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit 0,5% und die Höhe mit 1% fehlerhaft gemessen werden?

#### Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitungen (Jacobi-Matrizen) folgender Funktionen:

(a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ ze^{3xy} \end{bmatrix}$ ,

(b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(x, y) = \begin{bmatrix} x \sin y \\ y \sin x \\ \sin x \cos y \end{bmatrix}$ ,

(c)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $h(r, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$ ,

(d)  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$ .

Haben Sie eine Vorstellung, was die Funktion  $\gamma$  in (d) beschreibt?

### **Aufgabe 7**

Gegeben seien

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Komposition  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h := f \circ g$  mit Hilfe der Kettenregel.

### **Aufgabe 8**

Durch  $z = \frac{xy}{x+y}$  ist eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  definiert. Schränkt man die Werte von  $x$  und  $y$  auf

$$(x, y) = (e^t, e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

ein, erhält man eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie die Ableitung  $\frac{dz}{dt}$  mit Hilfe der Kettenregel. An welchen Stellen verläuft die Kurve horizontal, d.h. parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene?