TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 6. Oktober 2023
Prof. Dr. Fleurianne Bertrand
C. Bombach, T.-C. Riemer, Dr. M. Winkler

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

1. Übung: Potenz- und Fourierreihen (Musterlösung)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzintervall zu folgenden Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

Wiederholung: Kurze Erinnerung an punktweise und gleichmäßige Konvergenz, Cauchy-Hadamard, Wurzel- und Quotientenkriterium für Konvergenzradius

Lösung:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Quotientenkriterium:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Betrachten Grenzfälle:

- Für $x = -1$ konvergiert Reihe $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ nach Leibniz-Kriterium.
- Für $x = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (Divergenz).

Konvergenzintervall: $I = [-1, 1)$.

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+3)^n}{n^2}$. Quotientenkriterium:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = 1.$$

Betrachten Grenzfälle:

- Für $x = -3 - 1 = -4$ konvergiert Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ nach Leibniz-Kriterium.
- Für $x = -3 + 1 = -2$ ist es die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, welche ebenfalls konvergiert (siehe Mathematik I).

Konvergenzintervall: $I = [-4, -2]$.

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n}$. Wurzelkriterium:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Also $R = +\infty$ und somit: Konvergenzintervall: $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

(d) $\sum_{n\geq 1} n! \cdot x^n$. Quotientenkriterium:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Konvergenzintervall: $I = \{0\}$.

Aufgabe 2

Entwickeln Sie die folgenden reellen Funktionen um die Stelle $x_0 = 0$ in Potenzreihen und geben Sie deren Konvergenzradius an.

a) $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f_2(x) = 1 + x^2 + \mathrm{e}^{2x}$ c) $f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ d) $f_4(x) = \ln(1+x)$

Hinweis: Nutzen Sie bekannte Potenzreihenentwicklungen.

Wiederholung:

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad |x| < 1,$$
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n \Longrightarrow f'(x) = \sum_{n\geq 1} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Lösung:

(a)

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}.$$

Konvergenzradius $R = 1$ (z. B. über Wurzelkriterium mit $\limsup$
oder: geometrische Reihe konvergiert $\Leftrightarrow |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$)

(b)

$$f_2(x) = 1 + x^2 + e^{2x} = 1 + x^2 + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(2x)^n = 2 + 2x + 3x^2 + \sum_{n\geq 3} \frac{2^n}{n!} x^n.$$

Konvergenzradius $R = +\infty$ (da e^{2x} auf $\mathbb{R}$ konvergiert oder über Quotientenkriterium).

(c)

$$f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - x\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} - \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n+1} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1, & \frac{n}{4} \in \mathbb{N} \text{ oder } \frac{n+1}{4} \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Konvergenzradius $R = 1$ (siehe Aufgabe a).

(d)

$$f_4(x) = \ln(1+x) \Longrightarrow f_4'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ und } f_4(0) = 0.$$

und mit

$$f_4'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n\, x^n$$

folgt (wegen $f_4(0) = 1$)

$$f_4(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Konvergenzradius $R = 1$ (z. B. über Quotientenkriterium).

Aufgabe 3

Geben Sie für folgende Potenzreihen die Summenfunktion sowie das Konvergenzintervall an.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$

Lösung:

(a)

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(x-2)^n}{3^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{3}{5-x}$$

Konvergenzintervall: $I = (-1, 5)$ (geometrische Reihe konvergiert für $|\frac{x-2}{3}| < 1$, oder über Quotientenkriterium).

(b)

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \left(x^2\right)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

Konvergenzintervall: $I = (-1, 1)$ (wie in Aufgabe 2(a), oder z. B. über Quotientenkriterium für PR in $y = x^2$ und $\sqrt{1} = 1$).

(c)

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n x^n = \sum_{n\geq 0} (-x)^n - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

Konvergenzintervall: $I = (-1, 1)$ (geometrische Reihe konvergiert für $|-x| < 1$).

(d)

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(x+2)^n}{n!} - 1 = e^{x+2} - 1$$

Konvergenzintervall: $I = \mathbb{R}$ (z. B. über Quotientenkriterium).

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n!} x^{n+1} = x^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + x \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} x^n \\ &= x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n - x \\ &= (x^2 + x) e^x - x. \end{aligned}$$

Konvergenzintervall: $I = (-\infty, +\infty)$ (z. B. über Quotientenkriterium).

Aufgabe 4

Es sei $g(x) := x^2$ für $-\pi < x \leq \pi$. Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von g auf $\mathbb{R}$.

Wiederholung: Fourierreihen.

Lösung: Aufgrund der Symmetrie von $g(x) = x^2$ erhalten wir eine Kosinusreihe als Fourierreihe. Es ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

sowie für $k \in \mathbb{N}$ mittels 2facher partieller Integration

$$\begin{aligned}
a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\frac{x^2}{k\pi}\sin(k\,x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{k}\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2x}{k^2\pi}\cos(k\,x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi k^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= (-1)^k\frac{4}{k^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{x^2}{k\pi}\cos(k\,x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= -\frac{1}{k\pi}\left(\pi^2\cos(k\pi) - \pi^2\cos(-k\pi)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die Fourier-Reihe

$$g(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos(kx).$$

Aufgabe 5

Gegeben ist eine 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \pi, & \text{für } -\pi < x \le 0; \\ x, & \text{für } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ihre Fourierreihe werde mit $\hat{f}(x)$ bezeichnet. Geben Sie $\hat{f}(3\pi)$ und $\hat{f}(4\pi)$ an.

Lösung: Wir wissen gemäß Satz XX der Vorlesung (weil f stückweise stetig differenzierbar ist)

$$\hat{f}(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-} f(x) + \lim_{x\to x_0+} f(x)\right), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der 2π-Periodizität von f (und damit auch von $\hat{f}$) folgt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(3\pi) = \hat{f}(\pi) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-} f(x) + \lim_{x\to-\pi+} f(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-} x + \lim_{x\to\pi+} \pi\right) = \frac{1}{2}(\pi+\pi) = \pi.
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(4\pi) = \hat{f}(0) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-} \pi + \lim_{x\to 0+} x\right) = \frac{1}{2}(\pi+0) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

NOTIZ: Evtl. grafische Darstellung dieser Grenzwerte oder Nachweis bzw. Diskussion, dass $\hat{f}$ auch 2π-periodisch möglich.

Aufgabe 6

Es sei eine 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & \text{für } -\pi \le x \le 0, \\ \pi - x, & \text{für } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion f gerade oder ungerade?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Nutzen Sie die berechnete Fourierreihe um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

zu bestimmen.

Lösung: Man sieht leicht, dass $f(x) = \pi - |x|$ für $|x| < \pi$.

(a) Eine Skizze verdeutlicht schnell, dass diese Funktion gerade ist.

(b) Die Fourierreihe von f ist eine Kosinusreihe:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\underbrace{x\sin(k\,x)}_{=(-x)\sin(-k\,x)}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} x\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} x\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x\right) = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi$$

sowie für $k \in \mathbb{N}$ mittels Symmetrie der Kosinusfunktion

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\underbrace{x\,\cos(k\,x)}_{=-(-x)\cos(-k\,x)}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} x\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

wobei

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}(0-0) = 0.$$

und (mittels partieller Integration)

$$\int_0^\pi x\,\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(k\,x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^\pi = \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2}, & k \text{ ungerade,} \\ 0, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir als Fourierreihe also

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x).$$

(c) Es folgt aufgrund der Stetigkeit von f, dass

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)\,0)\right) - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}f(0) - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 7

Die Fourierreihe einer Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k\,\cos(kx) + \sum_{k=1}^\infty b_k\,\sin(kx),$$

kann man auch mittels der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^\infty c_k\,e^{\mathrm{i}kx}.$$

(a) In welchen Zusammenhang stehen die Koeffizienten a_k, b_k und c_k?

(b) Berechnen Sie mittels der komplexen Fourierreihe die Koeffizienten a_k, b_k der trigonometrischen Fourierreihe von

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

Lösung:

(a) Wir erinnern uns: $e^{ikx} = \cos(kx) + \sin(kx)\,i$. Es folgt mittels der Symmetrie von Kosinus und Sinus

$$\sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^\infty c_k\cos(kx) + i\sum_{k=-\infty}^\infty c_k\sin(kx)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^\infty (c_k + c_{-k})\cos(kx) + i\sum_{k=1}^\infty (c_k - c_{-k})\sin(kx)$$

$$\overset{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^\infty b_k\sin(kx).$$

Wir erhalten als Bedingung $c_0 = \frac{a_0}{2}$ und für $k \in \mathbb{N}$

$$c_k + c_{-k} = a_k, \qquad \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = b_k.$$

Wählen wir als Konvention $c_k = \overline{c_{-k}}$, so folgt direkt für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Re}(c_k) = \frac{1}{2} a_k, \qquad \mathrm{Im}(c_k) = -\frac{1}{2} b_k$$

und es gilt insbesondere für $k \in \mathbb{N}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Zunächst erhalten wir für $f(x) = e^x$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Ferner bestimmen wir die Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{N}$, nach obiger Formel:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\,(1-ik)} e^{(1-ik)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi\,(1-ik)} \left(e^{\pi}\, e^{-ik\pi} - e^{-\pi}\, e^{ik\pi} \right). \end{aligned}$$

Da $e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + i\, \sin(k\pi) = (-1)^k = e^{-ik\pi}$ für $k \in \mathbb{Z}$, folgt

$$c_k = (-1)^k\, \frac{c_0}{2}\, \frac{1+ik}{1+k^2}$$

bzw. für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = (-1)^k\, a_0\, \frac{1}{1+k^2}, \qquad b_k = (-1)^{k+1}\, a_0\, \frac{k}{1+k^2}.$$

Insbesondere gilt also für $x \in (-\pi, \pi)$

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(nx) - n\, \sin(nx)) \right].$$