



Musterklausur „Technische Mechanik 1“

Anliegen:

Nach dem Semester findet für das Fach „Technische Mechanik 1“ eine Klausur statt. Um in der Klausurvorbereitung den Leistungsstand im Lehrfach „Technische Mechanik 1“ beurteilen zu können, bieten wir Ihnen eine Musterklausur mit den relevanten Prüfungsthemen einschließlich Lösung, Bewertung und Zeitvorgabe an.

Bitte nutzen Sie in eigener Verantwortung dieses Angebot, um Ihren aktuellen Wissenstand zu überprüfen!

Aufgabenstellung in „Musterklausur-TM1.pdf“

Lösungen und Punktbewertung in „Loesung-Musterklausur-TM1.pdf“

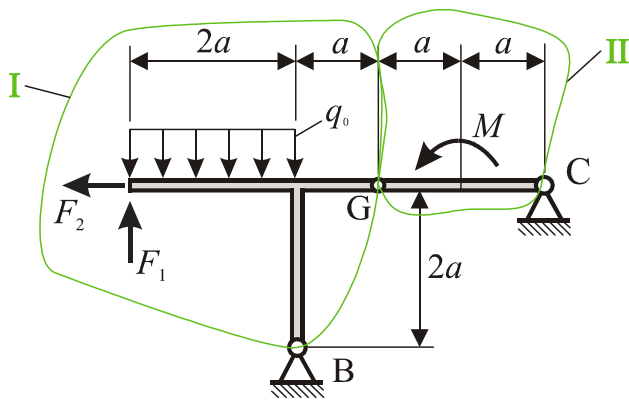
Erreichbare Gesamtpunktzahl: 90

Bestehensgrenze: 37 Punkte

Zeitvorgabe: 300 min (*Die eigentliche Klausur wird gem. DPO auf 120 min ausgelegt*)

Zugelassene Hilfsmittel:

- o Die Formelsammlung TECHNISCHE MECHANIK des Institutes für Festkörpermechanik (+ handschriftlichen Ergänzungen, KEINE Aufgaben!)
- o Ein mathematisches Taschenbuch oder ein mathematisches Tafelwerk
- o Ein Taschenrechner



Geg.: Länge a
 Streckenlast $q_0 = 3 \frac{F}{a}$
 Kräfte $F_1 = 4F$
 $F_2 = \frac{5}{2}F$
 Moment $M = 2Fa$

- Ges.: a) Lagerreaktionen in B und C, Gelenkkräfte in G
 b) Schnittgrößenverläufe analytisch
 c) Schnittgrößenverläufe grafisch
 d) Ort und Größe des betragsmäßig maximalen Biegemomentes

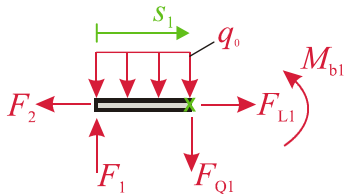
Zu a) Lagerreaktionen in B und C, Gelenkkräfte in G

<p>Freischnitte mit eingetragenen Lagerreaktionen und Gelenkkräften</p> <p>Schnitt I:</p> <p style="text-align: center;">2</p> <p>Schnitt II:</p> <p style="text-align: center;">2</p>	<p>Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung</p> <p>Schnitt I:</p> $\uparrow: F_{Bv} + F_{Gv} - 2q_0a + F_1 = 0 \quad (1) \quad (1)$ $\rightarrow: F_{Bh} + F_{Gh} - F_2 = 0 \quad (2) \quad (1)$ $\curvearrowright B: F_{Gv}a - 2F_{Gh}a - 2F_1a + 2F_2a + 2q_0a^2 = 0 \quad (3) \quad (1)$ <p>Schnitt II:</p> $\uparrow: F_{Cv} - F_{Gv} = 0 \quad (4) \quad (1)$ $\rightarrow: F_{Ch} - F_{Gh} = 0 \quad (5) \quad (1)$ $\curvearrowright C: 2F_{Gv}a + M = 0 \quad (6) \quad (1)$ <p>Lager- und Gelenkkräfte</p> $(6) \quad F_{Gv} = -\frac{M}{2a} = -F \quad (0,5)$ $(4) \quad F_{Cv} = F_{Gv} = -F \quad (0,5)$ $(1) \quad F_{Bv} = -F_{Gv} + 2qa - F_1 = 3F \quad (0,5)$ $(3) \quad F_{Gh} = \frac{1}{2}F_{Gv} - F_1 + F_2 + qa = F \quad (0,5)$ $(2) \quad F_{Bh} = -F_{Gh} + F_2 = \frac{3}{2}F \quad (0,5)$ $(5) \quad F_{Ch} = F_{Gh} = F \quad (0,5)$
--	--

Zu b) Schnittgrößenverläufe analytisch

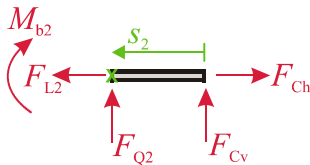
Freischnitte mit eingetragenen Bereichskordinaten und Schnittreaktionen

Schnitt 1: $0 \leq s_1 \leq 2a$



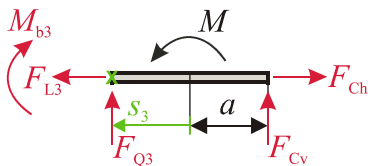
2

Schnitt 2: $0 \leq s_2 \leq a$



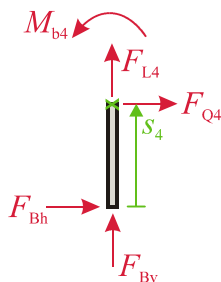
2

Schnitt 3: $0 \leq s_3 \leq 2a$



2

Schnitt 4: $0 \leq s_4 \leq 2a$



2

Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung

Hinweis: Mit X wird dabei der Punkt am Schnittufer bezeichnet!

Schnitt 1:

$$\rightarrow: F_{L1} - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{L1} = F_2 = \frac{5}{2}F$$

$$\uparrow: F_{Q1} + q_0 s_1 - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Q1} = -q_0 s_1 + F_1$$

Geben Sie hier eine Formel ein.

$$= \left(4 - 3 \frac{s_1}{a}\right) F \quad \text{3}$$

$$\begin{aligned} \curvearrow X: M_{b1} + q_0 \frac{s_1^2}{2} - F_1 s_1 = 0 &\Rightarrow M_{b1} = -q_0 \frac{s_1^2}{2} + F_1 s_1 \\ &= \left(4 - \frac{3}{2} \frac{s_1}{a}\right) F s_1 \end{aligned}$$

$$F_{Q1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow s_{1\text{ex}} = \frac{4}{3}a \quad \text{1}$$

$$M_{b1}(s_{1\text{ex}}) = \left(4 - \frac{3}{2} \frac{4}{3}\right) F \frac{4}{3}a = \frac{8}{3}a \quad \text{1}$$

Schnitt 2:

$$\leftarrow: F_{L2} - F_{Ch} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{L2} = F_{Ch} = F$$

$$\uparrow: F_{Q2} + F_{Cv} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Q2} = -F_{Cv} = F \quad \text{3}$$

$$\curvearrow X: M_{b2} - F_{Cv} s_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{b2} = F_{Cv} s_2 = -F s_2$$

Schnitt 3:

$$\leftarrow: F_{L3} - F_{Ch} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{L3} = F_{Ch} = F$$

$$\uparrow: F_{Q3} + F_{Cv} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Q3} = -F_{Cv} = F \quad \text{3}$$

$$\curvearrow X: M_{b3} - F_{Cv}(a + s_3) - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{b3} = F(a + s_3)$$

Schnitt 4:

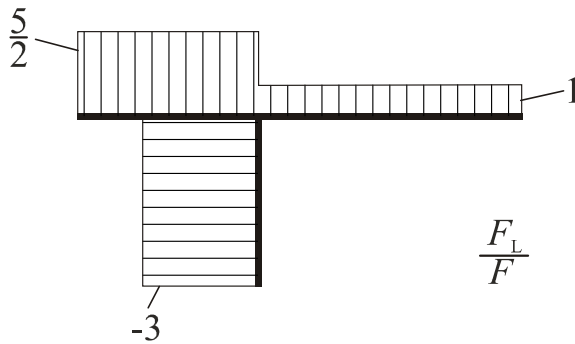
$$\uparrow: F_{L4} + F_{Bv} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{L4} = -F_{Bv} = -3F$$

$$\rightarrow: F_{Q4} + F_{Bh} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Q4} = -F_{Bh} = -\frac{3}{2}F \quad \text{3}$$

$$\curvearrow X: M_{b4} + F_{Bh} s_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{b4} = -F_{Bh} s_4 = -\frac{3}{2}F s_4$$

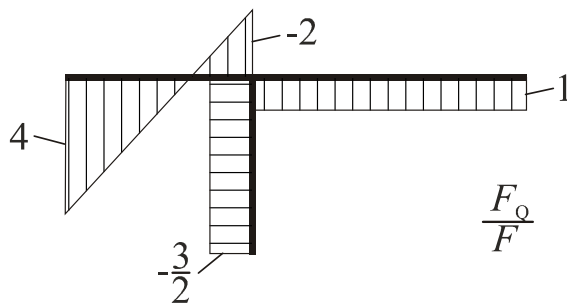
Zu c) Schnittgrößenverläufe grafisch

Längskraftverlauf



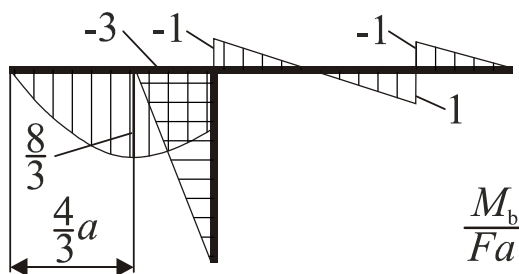
2

Querkraftverlauf



2

Biegemomentenverlauf



4

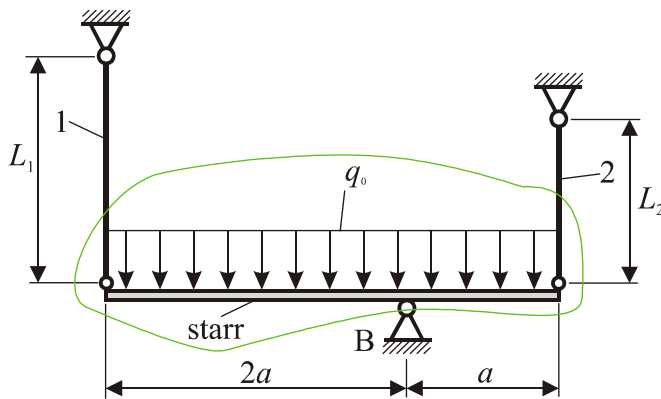
Zu d) Ort und Größe des betragsmäßig maximalen Biegemomentes

Maximales Biegemoment $|M_b|_{\max} = 3Fa$

Ort von $|M_b|_{\max}$: $s_4 = 2a$

2

Ermittlung von Stabkräften und Längenänderung der Stäbe



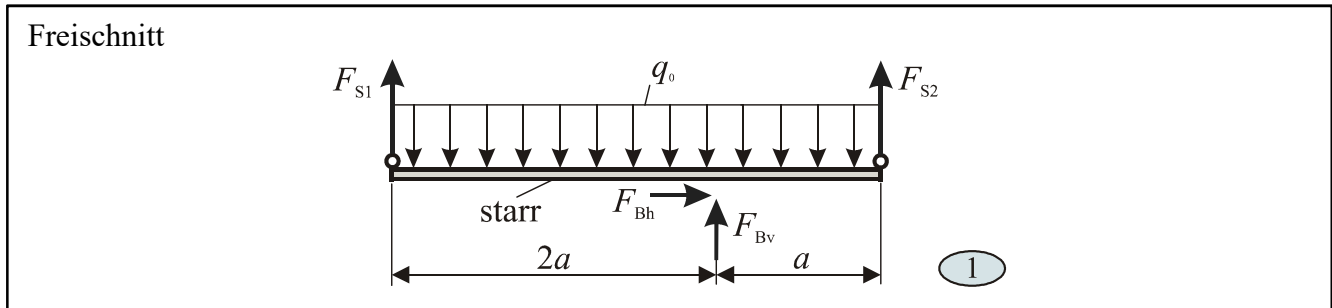
Geg.: Längen	a
	$L_1 = 1,5a, L_2 = a$
Streckenlast	q_0
Dehnsteifigkeiten	EA
	$EA_1 = 2EA$
	$EA_2 = EA$
Temperaturdifferenz	$\Delta T > 0$
Temperaturausdehnungskoeffizient	α

Der Stab 1 wird nicht erwärmt. Der Stab 2 kann einer Temperaturdifferenz um ΔT unterliegen. Vorausgesetzt wird, dass der Balken starr ist und die Beträge der Längenänderungen der Stäbe klein gegenüber den Stablängen sind ($|\Delta L_i| \ll L_i$ mit $i = 1, 2$).

Anmerkung: Die Lagerreaktionen in B sollen nicht berechnet werden.

- Ges.: a) Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 mit Erwärmung des Stabes 2
 b) Längenänderung der Stäbe 1 und 2 mit Erwärmung des Stabes 2
 c) Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 ohne Erwärmung des Stabes 2

Zu a) Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 mit Erwärmung des Stabes 2



Gleichgewichtsbedingung

$$\overset{\curvearrowright}{B}: -F_{S1}2a + F_{S2}a + q_0a \cdot \frac{3}{2}a = 0 \quad (1)$$

\Rightarrow System ist einfach statisch unbestimmt.

Verformungsbetrachtung

$$\Delta l_i = \frac{F_{Si}l_i}{EA_i} + \alpha_i \Delta T_i l_i \quad \text{mit } i = 1, 2 \quad (1)$$

$$\frac{\delta_1}{2a} = \frac{\delta_2}{a} \quad \text{mit } -\Delta l_1 = \delta_1 \text{ und } +\Delta l_2 = \delta_2 \quad \Rightarrow \quad -\Delta l_1 = 2\Delta l_2 \quad (1)$$

Zu a) Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 mit Erwärmung des Stabes 2

Berechnung

$$-\frac{F_{S1}l_1}{EA_1} = 2\frac{F_{S2}l_2}{EA_2} + 2\alpha\Delta Tl_2 \quad \text{mit } l_1 = 1,5a \text{ und } l_2 = a$$

$$-\frac{F_{S1}1,5a}{2EA} = \frac{2F_{S2}a}{EA} + 2\alpha\Delta Ta$$

$$-F_{S1} = \frac{8}{3}F_{S2} + \frac{8}{3}\alpha\Delta TEA \quad (2) \quad (0,5)$$

$$(2) \text{ in } (1) \quad \frac{8}{3}F_{S2} \cdot 2a + \frac{8}{3}\alpha\Delta TEA \cdot 2a + F_{S2}a + \frac{3}{2}q_0a^2 = 0$$

$$F_{S2} \left(\frac{19}{3} \right) = -\frac{3}{2}q_0a - \frac{16}{3}\alpha\Delta TEA \quad (0,5)$$

$$\text{Stabkräfte: } F_{S2} = -\frac{9}{38}q_0a - \frac{16}{19}\alpha\Delta TEA \quad (0,5)$$

$$F_{S1} = \frac{12}{19}q_0a - \frac{8}{19}\alpha\Delta TEA \quad (0,5)$$

Zu b) Längenänderung der Stäbe 1 und 2 mit Erwärmung des Stabes 2

Berechnung

$$\Delta l_1 = \frac{12}{19} \frac{q_0a}{2EA} \frac{3}{2}a - \frac{8}{19} \frac{\alpha\Delta TEA}{2EA} \frac{3}{2}a$$

$$= \frac{9}{19} \frac{q_0a^2}{EA} - \frac{6}{19}\alpha\Delta Ta \quad (0,5)$$

$$\Delta l_2 = -\frac{9}{38} \frac{q_0a}{EA} a - \frac{16}{19} \frac{\alpha\Delta TEA}{EA} a + \alpha\Delta Ta$$

$$= -\frac{9}{38} \frac{q_0a^2}{EA} + \frac{3}{19}\alpha\Delta Ta \quad (0,5)$$

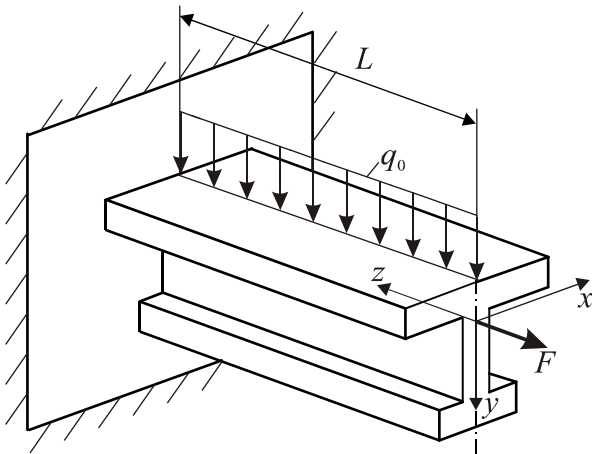
Zu c) Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 ohne Erwärmung des Stabes 2

Berechnung

$$F_{S2} = -\frac{9}{38}q_0a \quad (0,5)$$

$$F_{S1} = \frac{12}{19}q_0a \quad (0,5)$$

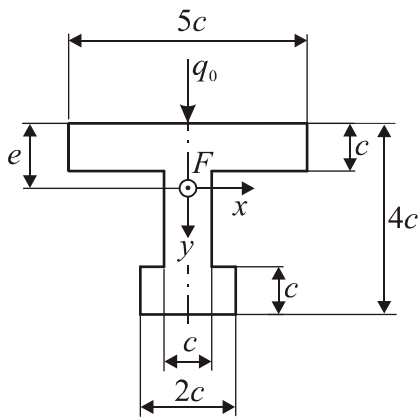
Normalspannungsberechnung bei gerader Biegung mit Längskraft.



Geg.:	Maß	c
	Länge	$L = 100c$
	Streckenlast	q_0
	Kraft	$F = 100q_0L$

- Ges.:
- Maß e für die Lage des Flächenschwerpunktes des gegebenen Querschnittes
 - Berechnen Sie I_{xx} bezüglich des x-y-Koordinatensystems im Schwerpunkt

Querschnitt



In der Einspannstelle ($z = L$):

- Werte für Schnittgrößen
- Normalspannungsverteilung $\sigma_{zz}(y)$
- Ort und Größe der betragsmäßig größten Normalspannung $|\sigma_{zz}|_{\max}$

Zu a) Maß e für die Lage des Flächenschwerpunktes des

gegebenen Querschnittes

Skizze mit Koordinatensystem

0,5

Berechnung

Teilquerschnitt 1:

$$A_1 = 5c \cdot c = 5c^2, \bar{x}_{s1} = 0, \bar{y}_{s1} = 0,5c$$

Teilquerschnitt 2:

$$A_2 = c \cdot 2c = 2c^2, \bar{x}_{s2} = 0, \bar{y}_{s2} = c + c = 2c$$

Teilquerschnitt 3:

$$A_3 = c \cdot 2c = 2c^2, \bar{x}_{s3} = 0, \bar{y}_{s3} = 3c + \frac{c}{2} = 3,5c$$

Gesamtquerschnitt

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 9c^2$$

$$\bar{x}_s = \frac{\bar{x}_{s1} \cdot A_1 + \bar{x}_{s2} \cdot A_2 + \bar{x}_{s3} \cdot A_3}{A} = 0 \quad 0,5$$

$$\bar{y}_s = \frac{\sum y_{si} \cdot A_i}{\sum A} = \frac{13,5c^3}{9c^2} \quad 0,5$$

$$\bar{y}_s = e = 1,5c \quad 0,5$$

Zu b) Flächenmomente 2. Ordnung bezüglich der Achsen x und y des Schwerpunktes für gegebenen Querschnitt

Flächenträgheitsmoment Rechteck: $I_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Je **(0,5)** pro richtigem Flächenträgheitsmoment

Teilquerschnitt 1: $I_{xx1} = \frac{5c \cdot c^3}{12} = \frac{5}{12}c^4$

Teilquerschnitt 2: $I_{xx2} = \frac{c \cdot (2c)^3}{12} = \frac{8}{12}c^4$

Teilquerschnitt 3: $I_{xx3} = \frac{2c \cdot c^3}{12} = \frac{2}{12}c^4$

Möglichkeit 1:

Flächenmoment für $\bar{x} - \bar{y}$ -Koordinatensystem:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum (I_{xxi} + \bar{y}_{Si}^2 A_i) = \frac{15}{12}c^4 + \frac{135}{4}c^4 = 35c^4 \quad (1) + (1)$$

Transformation mit Satz von Steiner:

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_S^2 A = 35c^4 - (1,5c)^2 9c^2 = 14,75c^4 \quad (1) + (1)$$

Möglichkeit 2:

Flächenmoment bezogen auf x - y -Koordinatensystem:

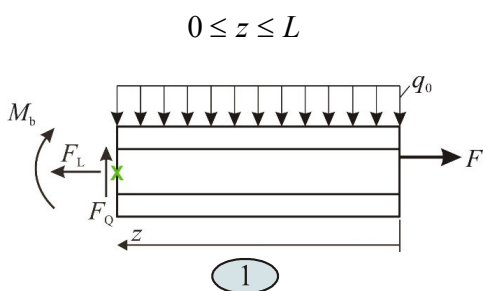
$$I_{xx} = \sum_{i=1}^3 [I_{xx,i} + (\bar{y}_s - \bar{y}_{si})^2 \cdot A_i]$$

$$= \left(\frac{5}{12}c^4 + (1,5c - 0,5c)^2 \cdot 5c^2 \right) + \left(\frac{8}{12}c^4 + (1,5c - 2c)^2 \cdot 2c^2 \right) (1) + (1)$$

$$+ \left(\frac{2}{12}c^4 + (1,5c - 3,5c)^2 \cdot 2c^2 \right) = 14,75 c^4 \quad (1) + (1)$$

Zu c) Werte für Schnittgrößen

Freischnitt



Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung

\uparrow : $F_Q - q_0 z = 0$ **(0,5)**

\rightarrow : $F_L - F = 0$ **(0,5)**

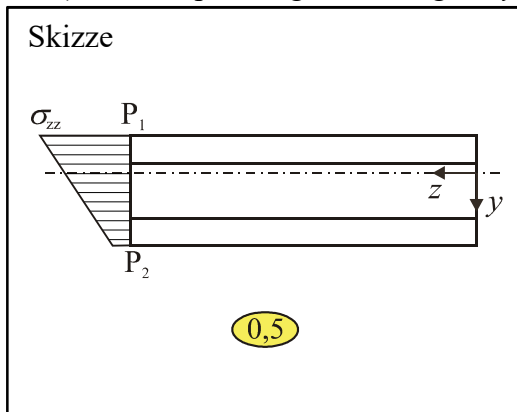
\curvearrowright : $-M_b - q_0 z \frac{z}{2} = 0$ **(0,5)**

$$F_Q(z=L) = q_0 L = 100 q_0 c$$

$$F_L(z=L) = F = 100 q_0 L = 100^2 q_0 c$$

$$M_b(z=L) = -\frac{1}{2} q_0 L^2 = -\frac{100^2}{2} q_0 c^2$$

Zu d) Normalspannungsverteilung $\sigma_{zz}(y)$ bei $z = L$



Berechnung

$$\sigma_{zz} = \frac{F_L}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y \quad 0,5$$

$$\sigma_{zz} = \frac{100^2 q_0 c}{9c^2} - \frac{5000 q_0 c^2}{14,75c^4} y$$

$$\sigma_{zz} = 1111,1 \frac{q_0}{c} - 338,98 \frac{q_0}{c^2} y \quad 0,5$$

Zu e) Ort und Größe der betragsmäßig größten Normalspannung bei $z = L$

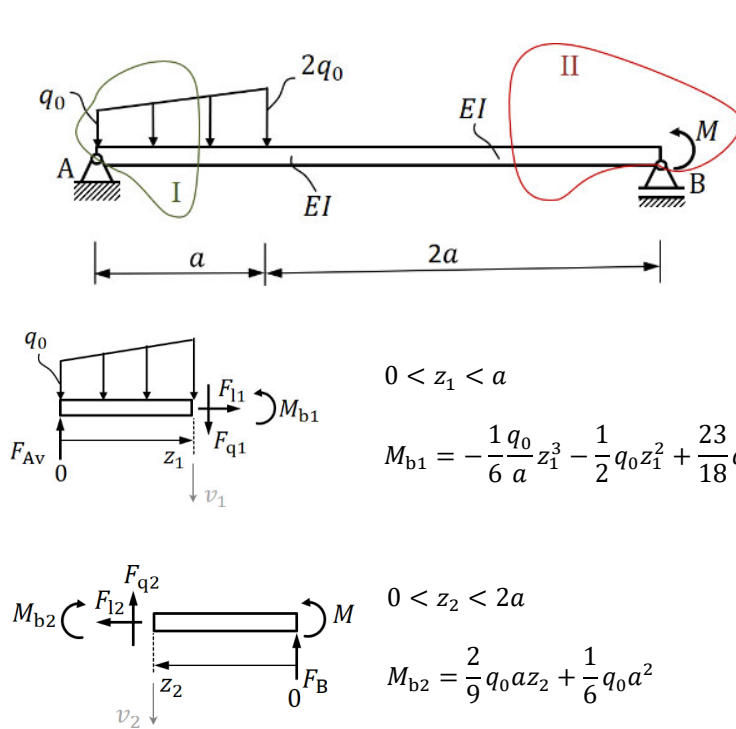
P₁:

$$\sigma_{zz}(y = -1,5c) = (1111,1 + 338,98 \cdot 1,5) \frac{q_0}{c} = 1619,6 \frac{q_0}{c} \quad 0,5$$

P₂:

$$\sigma_{zz}(y = 2,5c) = (1111,1 - 338,98 \cdot 2,5) \frac{q_0}{c} = 263,7 \frac{q_0}{c}$$

$$|\sigma_{zz}|_{\max} = 1619,6 \frac{q_0}{c} \quad \text{für } y = -1,5c \quad 1$$



Gegeben: $q_0, a, M = \frac{1}{6} q_0 a^2, EI$

Schnittgrößenverläufe des Biegemoments

Gesucht:

- Anzahl der Rand- und Übergangsbedingungen zur Beschreibung der Durchbiegung v der Balken mittels der DGL der elastischen Linie
- Formulierung der Rand- und Übergangsbedingungen
- Biegelinie (= elastische Linie) des Trägers in beiden Bereichen (Formeln, nicht zeichnen)
- Ort und Betrag der maximalen Durchbiegung des Trägers: $|v|_{\text{Max}}$; **HINWEIS: Dieses Maximum befindet sich in Bereich II**

Drücken Sie alle Ergebnisse mit den gegebenen Größen q_0, a und EI aus!

- a) Anzahl der Rand- und Übergangsbedingungen

4 (0,5)

- b) Mathematische Formulierung der Rand- und Übergangsbedingungen

$v_1(z_1 = 0) = 0$ (0,5) $v_2(z_2 = 0) = 0$ (0,5)
 $v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = 2a)$ (0,5)
 $v_1'(z_1 = a) = -v_2'(z_2 = 2a)$ (0,5)

- c) Biegelinie (= elastische Linie) des Trägers in beiden Bereichen

$EI v_1''(z_1) = -M_{b1}(z_1) = \frac{q_0}{6a} z_1^3 + \frac{q_0}{2} z_1^2 - \frac{23q_0 a}{18} z_1$
 $EI v_1'(z_1) = \frac{q_0}{24a} z_1^4 + \frac{q_0}{6} z_1^3 - \frac{23q_0 a}{36} z_1^2 + C_1$ (0,5)
 $EI v_1(z_1) = \frac{q_0}{120a} z_1^5 + \frac{q_0}{24} z_1^4 - \frac{23q_0 a}{108} z_1^3 + C_1 \cdot z_1 + C_2$ (0,5)
 $EI v_2''(z_2) = -M_{b2}(z_2) = -\frac{2q_0 a}{9} z_2 - \frac{q_0 a^2}{6}$
 $EI v_2'(z_2) = -\frac{2q_0 a}{18} z_2^2 - \frac{q_0 a^2}{6} z_2 + C_3$ (0,5)

Zu c) Platz für Berechnung

$$EI v_2(z_2) = -\frac{2q_0 a}{54} z_2^3 - \frac{q_0 a^2}{12} z_2^2 + C_3 \cdot z_2 + C_4 \quad (0,5)$$

1. Randbedingung $v_1(z_1 = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ (0,5)

2. Randbedingung $v_2(z_2 = 0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$ (0,5)

1. Übergangsbedingung $v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = 2a)$

$$\frac{q_0}{120a} a^5 + \frac{q_0}{24} a^4 - \frac{23q_0 a}{108} a^3 + C_1 \cdot a = -\frac{2q_0 a}{54} (2a)^3 - \frac{q_0 a^2}{12} (2a)^2 + C_3 \cdot 2a$$

$$\frac{q_0}{120} a^3 + \frac{q_0}{24} a^3 - \frac{23q_0}{108} a^3 + C_1 = -\frac{16q_0}{54} a^3 - \frac{4q_0}{12} a^3 + C_3 \cdot 2$$

$$\frac{q_0}{120} a^3 + \frac{5q_0}{120} a^3 - \frac{23q_0}{108} a^3 + C_1 = -\frac{32q_0}{108} a^3 - \frac{40q_0}{120} a^3 + C_3 \cdot 2$$

$$C_1 = -\frac{9q_0}{108} a^3 - \frac{46q_0}{120} a^3 + C_3 \cdot 2 = -\frac{56}{120} q_0 a^3 + 2C_3 \quad (1)$$

2. Übergangsbedingung $v_1'(z_1 = a) = -v_2'(z_2 = 2a)$

$$\frac{q_0}{24a} a^4 + \frac{q_0}{6} a^3 - \frac{23q_0 a}{36} a^2 + C_1 = -\left(-\frac{2q_0 a}{18} (2a)^2 - \frac{q_0 a^2}{6} 2a + C_3\right)$$

$$\frac{q_0}{24} a^3 + \frac{4q_0}{24} a^3 - \frac{23q_0}{36} a^3 + C_1 = \frac{8q_0}{18} a^3 + \frac{6q_0}{18} a^3 - C_3$$

$$\frac{5q_0}{24} a^3 - \frac{51q_0}{36} a^3 + C_1 = -C_3$$

$$-\frac{87q_0}{72} a^3 + C_1 = -C_3 \quad (0,5)$$

$$-\frac{87q_0}{72} a^3 - \frac{14}{30} q_0 a^3 + 2C_3 = -C_3 \quad (1)$$

$$C_3 = \frac{67}{120} q_0 a^3 \quad (1)$$

$$C_1 = -\frac{56}{120} q_0 a^3 + 2C_3 = \frac{78}{120} q_0 a^3 \quad (1)$$

Zu c) Platz für Berechnung

Zu c) Ergebnisse

Geben Sie hier die Formulierungen der Biegelinie (elastische Linie) getrennt für beide Bereiche an

Bereich 1:

$$v_1(z_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q_0}{120a} z_1^5 + \frac{q_0}{24} z_1^4 - \frac{23q_0a}{108} z_1^3 + \frac{78}{120} q_0 a^3 \cdot z_1 \right) \quad (0,5)$$

Bereich 2:

$$v_2(z_2) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2q_0a}{54} z_2^3 - \frac{q_0a^2}{12} z_2^2 + \frac{67}{120} q_0 a^3 \cdot z_2 \right) \quad (0,5)$$

d) Ort und Betrag der maximalen Verschiebung $|v|_{\text{Max}}$ (Diese befindet sich in Bereich II)Maximum ist bei $v_2'(z_2^*) = 0$ oder an den Bereichsgrenzen $z_2 = 0$ oder $z_2 = 2a$

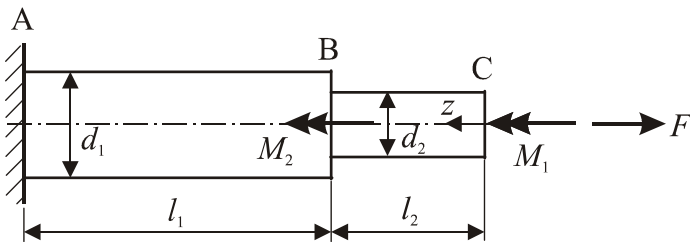
$$EI v_2'(z_2^*) = 0 = -\frac{2q_0a}{18} z_2^{*2} - \frac{q_0a^2}{6} z_2^* + \frac{67}{120} q_0 a^3$$

$$0 = z_2^{*2} + \frac{3a}{2} z_2^* - \frac{201}{40} a^2$$

$$z_2^* = -\frac{3a}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \frac{201}{40} a^2} \Rightarrow z_2^* = 1.61a$$

$$v_2(z_2^*) = 0,528 \frac{q_0 a^4}{EI} \quad \text{Bereichsgrenzen: } v_2(0) = 0, \quad v_2(2a) = 0,487 \frac{q_0 a^4}{EI} \quad (1) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow v_{\text{max}} = v_2(z_2 = 1.61a) = 0,528 \frac{q_0 a^4}{EI} \quad (0,5)$$



Aus zwei Profilen (1 und 2) zusammengesetzter, prismatischer Träger. Einseitig eingespannt und durch die Momente M_1 und M_2 sowie die Kraft F belastet.

- Geg.:
- Momente $M_1 = 100 \text{ Nm}$
 $M_2 = 200 \text{ Nm}$
 - Kraft $F = 20 \text{ kN}$
 - Längen $l_1 = 1 \text{ m}$
 $l_2 = 0,5 \text{ m}$
 - Durchmesser $d_1 = 30 \text{ mm}$
 $d_2 = 20 \text{ mm}$
 - Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 - Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$

- Ges.:
- a) Ort und Betrag der maximalen Torsionsschubspannung
 - b) Relativverdrehung des Querschnittes C bezüglich des Querschnittes A
 - c) Ort und Betrag der maximalen Normalspannung
 - d) Ort und Betrag der maximalen Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Zu a) Ort und Betrag der maximalen Torsionsschubspannung

Freischnitte mit eingetragenen Bereichskoordinaten und Schnittgrößen	Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung
<p style="text-align: center;">Schnitt 1: $0 \leq z_1 \leq l_1$</p> <p style="text-align: center;">(0,5)</p> <p style="text-align: center;">Schnitt 2: $0 \leq z_2 \leq l_2$</p> <p style="text-align: center;">(0,5)</p>	<p>← : $M_{t1} + M_1 + M_2 = 0$ (0,5)</p> <p style="margin-left: 20px;">$\Rightarrow M_{t1} = -M_1 - M_2 = -300 \text{ Nm}$</p> <p>← : $F_{L1} - F = 0$ (0,5)</p> <p style="margin-left: 20px;">$\Rightarrow F_{L1} = F = 20 \text{ kN}$</p> <p>← : $M_{t2} + M_1 = 0$ (0,5)</p> <p style="margin-left: 20px;">$\Rightarrow M_{t2} = -M_1 = -100 \text{ Nm}$</p> <p>← : $F_{L2} - F = 0$ (0,5)</p> <p style="margin-left: 20px;">$\Rightarrow F_{L2} = F = 20 \text{ kN}$</p>

Zu a) Ort und Betrag der maximalen Torsionsschubspannung

Berechnung

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_t|}{W_t} \quad (0,5)$$

$$|\tau_1| = \frac{|M_{t1}|}{W_{t1}} \quad \text{mit} \quad W_{t1} = \frac{\pi}{16} d_1^3 = 5301,4 \text{ mm}^3 \quad (0,5)$$

$$|\tau_1| = \frac{300 \text{ Nm}}{5301,4 \text{ mm}^3} = 56,6 \text{ MPa}$$

$$|\tau_2| = \frac{|M_{t2}|}{W_{t2}} \quad \text{mit} \quad W_{t2} = \frac{\pi}{16} d_2^3 = 1570,8 \text{ mm}^3 \quad (0,5)$$

$$|\tau_2| = \frac{100 \text{ Nm}}{1570,8 \text{ mm}^3} = 63,7 \text{ MPa}$$

$$|\tau|_{\max} = 63,7 \text{ MPa} \quad \text{in Profil 2 mit } d_2 \text{ am Außenrand} \quad (1)$$

Zu b) Relativverdrehung des Querschnittes C bezüglich des Querschnittes A

Berechnung

$$|\varphi_{AC}| = |\varphi_{AB} + \varphi_{BC}| \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{M_t l}{GI_t}; \quad I_t = \frac{\pi}{32} d^4 \quad \text{und} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1)$$

$$|\varphi_{AC}| = \left| \frac{M_{t1} l_1}{GI_{t1}} + \frac{M_{t2} l_2}{GI_{t2}} \right|$$

$$|\varphi_{AC}| = \left| \frac{-100 \text{ Nm} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 2(1+0,3) \cdot 32}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot \pi \cdot 20^4 \text{ mm}^4} + \frac{-300 \text{ Nm} \cdot 1 \text{ m} \cdot 2(1+0,3) \cdot 32}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot \pi \cdot 30^4 \text{ mm}^4} \right|$$

$$|\varphi_{AC}| = |-0,0394 - 0,0467| = 0,08619$$

$$|\varphi_{AC}| = 4,94^\circ \quad (0,5)$$

Zu c) Ort und Betrag der maximalen Normalspannung

Berechnung

$$\sigma_{z1} = \frac{F_{L1}}{A_1} = \frac{20 \text{ kN}}{\frac{\pi}{4} 30^2 \text{ mm}^2} = 28,3 \text{ MPa} \quad (0,5)$$

$$\sigma_{z2} = \frac{F_{L2}}{A_2} = \frac{20 \text{ kN}}{\frac{\pi}{4} 20^2 \text{ mm}^2} = 63,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 63,7 \text{ MPa} \quad \text{in Profil 2 mit } d_2 \quad (1)$$

Zu d) Ort und Betrag der maximalen Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Berechnung

$$\sigma_{V31} = \sqrt{\sigma_{z1}^2 + 3\tau_1^2} = 102,0 \text{ MPa}$$

0,5

$$\sigma_{V32} = \sqrt{\sigma_{z2}^2 + 3\tau_2^2} = 127,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{V3\max} = 127,4 \text{ MPa in Profil 2 mit } d_2 \text{ am Außenrand}$$

1