

---

## Mathematik für Ingenieure - WS2023/24 Übungsblatt 5

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Gegeben sind die nachstehenden Differentialgleichungen.

- (a)  $F(x, y(x), y'(x), y'''(x)) = 0$                       (b)  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4$   
(c)  $\frac{dv(t)}{dt} = -\cos(2t)$                                       (d)  $F(x, y, z) = 0$   
(e)  $2 \cdot \dot{x}(t) = 5t^2$     (f)  $f^{(n)}(x) = \sin(2x)$   
(g)  $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^2) dy = 0$               (h)  $y''(x) = 4x, y(1) = y'(1) = 0.$

Entscheiden Sie, welche der Gleichungen gewöhnliche bzw. partielle Differentialgleichungen sind. Geben Sie ebs. an, welche der gewöhnlichen Differentialgleichungen in expliziter bzw. impliziter Darstellung gegeben sind.

**Aufgabe 2:** Überprüfen Sie, ob die Funktionen mit den Funktionstermen  $y = f(x), x \in D$ , Lösungen der angegebenen Differentialgleichungen sind.

- (a)  $y = f(x) = \tan x, y' = 1 + y^2$                               (b)  $y = f(x) = e^{2x}, y''' - 3y'' + 4y = 0$   
(c)  $y = f(x) = \ln x, (\ln x - 1)y'' - y'x + yx^2 = (\ln x - 1)^2$

**Aufgabe 3:** Bestimmen Sie jeweils die Isoklinenschar zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung. Skizzieren Sie diese im Bereich  $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ .

- (a)  $y' = 3x$     (b)  $y' = -x \cdot y$     (c)  $y' = y - x$

**Aufgabe 4:** Ermitteln Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, n \in \mathbb{N}^*$$

deren Lösungsschar alle Parabeln umfasst, die den Koordinatenursprung  $O(0, 0)$  enthalten und eine zur  $y$ -Achse parallele Achse besitzen.

*Hinweis:* Überlegen Sie, wie viele (unabhängige) Parameter die Parabelschar besitzt.

---

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 5:** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen:

- (a)  $y' = x$     (b)  $y' = -\frac{y}{x}$   
(c)  $y' = y$     (d)  $y' = xy$

*Hinweis:* Nutzen Sie jeweils die Isoklinen, um das Richtungsfeld zu skizzieren.

**Aufgabe 6:** Gegeben ist die Lösungs(-kurven-)schar

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung 3. Ordnung ( $C_1$ ,  $C_2$ , und  $C_3$  sind Scharparameter).

- (a) Begründen Sie, dass (1) einer Differentialgleichung der Form  $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$  mit konstanten Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  genügt.<sup>1</sup> Berechnen Sie diese Koeffizienten.
- (b) Geben Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$  an, d. h. bestimmen Sie die Scharparameter.

**Aufgabe 7:** Gegeben ist die 1-parametrische Schar ebener Kurven  $k_\alpha$  mit

$$k_\alpha: \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

worin  $\alpha \in \mathbb{R}$  den Scharparameter bezeichnet.

- (a) Stellen Sie die Kurven  $k_\alpha$  aus Formel (2) für  $\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  graphisch dar.
- (b) Zeigen Sie durch implizite Differentiation der Kurvengleichung (2), dass

$$y(x)^2 \cdot y'(x)^2 + y(x)^2 = 1 \quad (3)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung beschreibt, deren Lösungen  $x \mapsto y = f(x)$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}$ , die Kurvengleichung (2) erfüllen.

- (c) Zeigen Sie, dass die Geraden  $y = \pm 1$  als singuläre Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung in Formel (3) auftreten.

---

<sup>1</sup>Die Differentialgleichung enthält keinen der Scharparameter  $C_1$ ,  $C_2$  oder  $C_3$ , ist also für jede Wahl erfüllt.