

**Mathematik IV (für IF, ET, Ph)**

Sommersemester 2025

## 2. Übung: Integralsätze

**Aufgabe 1**

Berechne alle Doppelpunkte der Kurven

a)  $\Gamma := \{\mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} \sin(t) \\ t^2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\},$

b)  $\Gamma := \{\mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} : t \in [0, 2\pi]\}.$

Lösung: (a) Wir suchen 2 Argumente  $t_1 \neq t_2$ , die folgende Gleichungen erfüllen:

$$\sin(t_1) = \sin(t_2), \quad t_1^2 = t_2^2.$$

Die letzte Bedingung liefert sofort  $t_2 = -t_1$ , denn der Fall  $t_2 = t_1$  soll ausgeschlossen werden. Die erste Bedingung ist dann erfüllt, wenn

**Fall 1:**  $t_2 = t_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zusammen ergibt sich

$$t_2 = -t_1 = t_1 + 2k\pi \Rightarrow t_1 = -k\pi$$

Also haben wir Doppelpunkte für  $t_1 = k\pi$  und  $t_2 = -k\pi$ , und zwar  $\mathbf{x}(t_1) = (0, k^2\pi^2)^\top$ .

**Fall 2:**  $t_2 = \pi - t_1 + 2k\pi = (2k+1)\pi - t_1.$

Beide Bedingungen zusammen liefern

$$t_2 = -t_1 = (2k+1)\pi - t_1 \Rightarrow 0 = (2k+1)\pi,$$

was einen Widerspruch darstellt. Der zweite Fall liefert also keine weiteren Doppelpunkte.

(b) Durch Ausprobieren  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = \mathbf{x}(2\pi) = (0, 0)^\top$  stellt man fest, dass  $(0, 0)^\top$  Doppelpunkt der geschlossenen Kurve  $\Gamma$  ist.**Aufgabe 2**Überprüfe mittels Satz 13.8, sowie über Berechnung des Kurvenintegrals über die geschlossene Kurve  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , ob folgende Vektorfelder Potentialfelder (Gradientenfelder) sind:

(a)  $\mathbf{v}(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix},$  (b)  $\mathbf{v}(x, y) = \begin{bmatrix} x+y \\ xy \end{bmatrix},$  (c)  $\mathbf{v}(x, y) = -\frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$

Lösung:**Vorüberlegung:** Ein Vektorfeld  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Potentialfeld (oder Gradientenfeld), wenn ein Skalarfeld  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  gilt. In Mathematik III haben wir dies ausgenutzt

um Kurvenintegrale zweiter Art zu berechnen. Sei dazu  $C$  eine reguläre Kurve mit Startpunkt  $a$  und Endpunkt  $b$ . Dann muss gelten:

$$\int_C \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \phi(b) - \phi(a),$$

das heißt, das Kurvenintegral ist Wegunabhängig, da deren Wert nur von Start- und Endpunkt abhängt. Insbesondere folgt daraus auch für geschlossene Kurven  $C$ :  $\int_C \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0$ .

Um zu testen ob  $\mathbf{v}$  ein Potentialfeld ist nutzen wir die Bedingung aus Satz 13.8 und überprüfen die Symmetrie der Jacobi-Matrix. Ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist dies sogar ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Potentials.

(a)  $\mathbf{v}$  ist auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert, damit ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend. Ferner ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\mathbf{v}'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals zweiter Art folgt sofort  $\int_K \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0$ . Dies rechnet man auch leicht nach:

$$\int_K \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt = \int_0^\pi (-\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 0.$$

(b) Die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  lautet

$$\mathbf{v}'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Diese ist nicht symmetrisch, also kann  $\mathbf{v}$  kein Potentialfeld sein. Die Rechnung über das Kurvenintegral zweiter Art zeigt auch

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t) \sin(t) - \sin^2(t) + \cos^2(t) \sin(t)) dt = -\pi, \end{aligned}$$

was die Tatsache, dass  $\mathbf{v}$  kein Potentialfeld ist, bestätigt.

(c) Die Jacobi-Matrix lautet

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 2xy & y^2 - x^2 \\ y^2 - x^2 & -2xy \end{bmatrix}$$

und ist symmetrisch. Der Wert des Kurvenintegrals lautet

$$\int_K \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 2\pi$$

Ist das ein Widerspruch zur Theorie?

*Antwort:* Nein, denn der Definitionsbereich von  $\mathbf{v}$  ist  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und damit nicht einfach zusammenhängend.  $\mathbf{v}$  ist dann kein Potentialfeld.

### Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

berandet wird. Benutzen Sie den Satz von Green bzw. die Flächeninhaltsformel.

Lösung: Wiederholung:  $D \in \mathbb{R}^2$ ,  $v : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig diffbar,  $B \subset D$  Bereich mit positiv orientiertem Rand, der aus endlich vielen geschlossenen Kurven besteht.

Satz von Green:

$$\int_{\partial B} v dx = \int_B \left[ \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} \right] dF.$$

Flächeninhaltsformel:  $\partial B = \gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$

$$F(B) = \int_B dF = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_e} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] dt.$$

Wir wenden die Flächeninhaltsformel an mit  $x(t) = \cos^3 t$ ,  $y(t) = \sin^3 t$ . Somit ist  $x'(t) = -3 \cos^2 t \sin t$  sowie  $y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t$ . Durch Nutzung des Additionstheorems des Sinus und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sin(2t) \right)^2 dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 z dz = \frac{3}{16} \left[ \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z \cos z \right]_0^{4\pi} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

#### Aufgabe 4

Überprüfen Sie den Satz von Green, indem Sie die folgenden Kurvenintegrale  $\int_{\gamma} v dx$  einmal direkt und einmal als Doppelintegral über den von der Kurve  $\gamma$  eingeschlossenen Bereich berechnen:

a)  $v(x) = \begin{bmatrix} x - y \\ xy \end{bmatrix}$ ,  $\gamma$  sei das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 3)$ ,

b)  $v(x) = \begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$ ,  $\gamma$  sei der Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung.

Lösung:

a) Wir berechnen zunächst das Kurvenintegral zweiter Art direkt. Dafür nutzen wir die Parametrisierung

$$\gamma_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3t \end{bmatrix}, \quad \gamma_3(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ 3-3t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Somit ergibt sich für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v dx &= \int_{\gamma_1} v dx + \int_{\gamma_2} v dx + \int_{\gamma_3} v dx \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-3t \\ 3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-t-3+3t \\ (1-t)(3-3t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t + 9t - 1 + t + 3 - 3t - 3(3-3t-3t+3t^2) dt = \int_0^1 -7 + 26t - 9t^2 dt \\ &= [-7t + 13t^2 - 3t^3]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Green können wir das Kurvenintegral auch auf das folgende Bereichsintegral zurückführen

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^{3x} (y + 1) dy dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^{3x} dx = \int_0^1 \left( \frac{9}{2} x^2 + 3x \right) dx \\ &= \left[ \frac{3}{2} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

b) Wir parametrisieren den Kreisrand mittels Polarkoordinaten:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \end{bmatrix} \implies \gamma'(t) = \begin{bmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{bmatrix} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Folglich erhalten wir für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -9 \sin^2 t \\ 9 \cos^2 t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{bmatrix} dt = 27 \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt \\ &= 27 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t + (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= 27 \int_0^{2\pi} \sin t - \cos^2 t \sin t + \cos t - \sin^2 t \cos t dt \\ &= 27 \left[ -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Über den Satz von Green ergibt sich das Integral

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (2x + 2y) dy dx &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3r(2r \cos \varphi + 2r \sin \varphi) d\varphi dr \\ &= 6 \int_0^3 r^2 dr \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 0\end{aligned}$$

## Aufgabe 5

Gegeben sei die Kugelkappe

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{2} \cos \varphi \sin \theta, y = \sqrt{2} \sin \varphi \sin \theta, z = \sqrt{2} \cos \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}.$$

$\mathbf{v}$  besitzt das Vektorpotential  $\mathbf{w} = (xz, xy, yz)^T$ . Berechnen Sie den Fluss von  $\mathbf{v}$  durch  $S$ . Hilft Ihnen hier möglicherweise ein Integralsatz?

**Lösung:** Wiederholung: Stokesscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig diffbar mit  $M \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $S$  sei reguläres Flächenstück in  $M$  und von einer geschlossenen, regulären, orientierten Kurve  $\partial S$  berandet, dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} dO.$$

Mit der Beziehung  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$  und dem Stokesschen Integralsatz ergibt sich für den Fluss

$$\int_S \mathbf{v} dO = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{w} dO = \oint_{\partial S} \mathbf{w} d\mathbf{x}.$$

Die Randkurve der Kugelkappe erhalten wir für  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , daraus folgt die Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos t \sin \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \sin t \sin \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Somit ergibt sich die folgende Rechnung für den Fluss:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{w} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \cos^2 t \sin t dt \\ &= \left[ \frac{\cos^2 t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

### Aufgabe 6

Berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$  für

- (a)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $S : x_1 + x_2 + x_3 = a$  ( $a > 0$ ),  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $\mathbf{n}$  zeige nach oben.
- (b)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$  ( $a > 0$ ),  $\mathbf{n}$  zeige nach außen.  
Berechnen Sie das Integral mit und ohne Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Lösung:

(a) Parametrisieren  $S$  mit

$$p(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ a - x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a - x_1$$

$$p_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad p_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{x_1} \times p_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 - (-1) \\ 0 - (-1) \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} := \frac{p_{x_1} \times p_{x_2}}{\|p_{x_1} \times p_{x_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$dS = \|p_{x_1} \times p_{x_2}\| dx_1 dx_2 = \sqrt{3} dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{x_1=0}^a \int_{x_2=0}^{a-x_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ a - x_1 - x_2 \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sqrt{3} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^a \int_{x_2=0}^{a-x_1} x_1 + x_2 + (a - x_1 - x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^a a \cdot (a - x_1) dx_1 = a^3 - a^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} x_1^2 \right]_0^a = \frac{a^3}{2} \end{aligned}$$

(b)  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ,  $\mathcal{S}$  Kugeloberfläche mit Radius  $a$

- Ohne Gauß:  $\mathcal{S}$  param. durch  $p(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \sin \theta \\ a \sin \varphi \sin \theta \\ a \cos \theta \end{pmatrix}$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow p_\varphi = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \sin \theta \\ a \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_\theta = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \cos \theta \\ a \sin \varphi \cos \theta \\ -a \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$p_\varphi \times p_\theta = \dots = -a^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\|p_\varphi \times p_\theta\| = a^2 \sin \theta$$

$$d\mathcal{S} = a^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} := \frac{-p_\varphi \times p_\theta}{\|p_\varphi \times p_\theta\|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = p(\varphi, \theta) = a\mathbf{n}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{a \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}_{=1} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi a^3 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

- mit Gauß:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \operatorname{div}(F(\mathbf{x})) dV = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a 1 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 3 \cdot 2\pi \frac{1}{3} a^3 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

## Aufgabe 7

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss das Flussintegral  $\int_{\partial B} \mathbf{v} dO$

a) für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y^2 \\ xz^3 \\ (z-1)^2 \end{bmatrix}$$

und den Bereich  $B$ , der vom Zylinder  $x^2 + y^2 = 4$  und den Flächen  $z = 1$  und  $z = 5$  berandet wird, sowie

b) für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix}$$

und die Kugel  $B$  um den Ursprung mit dem Radius  $R$ .

Lösung:

(a) Mit  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 2z - 2$  und der Parametrisierung (Zylinderkoordinaten)

$$\mathbf{p}(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [1, 5], \quad \det(\mathbf{p}') = r$$

folgt aus dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{v} dO &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_1^5 r(2z - 2) dz d\varphi dr \\ &= \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^5 2z - 2 dz = 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^2 [z^2 - 2z]_1^5 \\ &= 4\pi(25 - 10 - 1 + 2) = 64\pi. \end{aligned}$$

(b) Wir nutzen Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{p}(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi] \quad \det(\mathbf{p}') = r^2 \sin \theta.$$

Mit  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 2x + 3y^2 + 3z^2$  folgt aus dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{v} dO &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_B 2x + 3y^2 + 3z^2 dV = \int_B 3(x^2 + y^2 + z^2) + 2x - 3x^2 dV \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3r^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &\quad + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2r \cos \varphi \sin \theta - 3r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \end{aligned}$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3r^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr &= 3 \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= 6\pi \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{12}{5} R^5 \pi. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2r \cos \varphi \sin \theta - 3r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= 2 \int_0^R r^3 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta - 3 \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= -3 \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R \left[ \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{3}{5} R^5 \pi \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{5} R^5 \pi. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für den Fluss

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} dO = \frac{12}{5} R^5 \pi - \frac{4}{5} R^5 \pi = \frac{8}{5} R^5 \pi.$$