

Folien zur Lehrveranstaltung

Mathematik für Medieninformatik

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022/23

Kapitel 3

Zahlen und Zahlendarstellungen

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022/23

Lernziele dieses Kapitels

- ▶ In diesem Kapitel lernen Sie die uns allen wohlbekanntesten Zahlenmengen kennen.
- ▶ Sie erfahren, wie man vor rund 150 Jahren die natürlichen Zahlen und damit das Fundament der Mathematik, wie wir sie heute kennen und benutzen, konstruiert hat.
- ▶ Mit der vollständigen Induktion lernen Sie ein Beweisverfahren kennen, das immer dort eingesetzt wird, wenn natürliche Zahlen eine Rolle spielen.
- ▶ Weiter werden wir uns mit Zahlendarstellungen beschäftigen, da dieser Thematik insbesondere in der Informatik eine große Bedeutung zukommt.

Inhalt

von Kapitel 3: Zahlen und Zahlendarstellungen

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Peano-Axiome

Rechenoperationen

Ordnungsrelation

Vollständige Induktion

Zahlendarstellungen

Stellenwertsysteme

b -adische Darstellung von Zahlen

Umwandlung zwischen Zahlensystemen

Was bedeutet es eigentlich, eine Zahl zu sein?

Könnten Sie diese Frage beantworten...

... ohne dabei das Wort "Zahl" zu benutzen?

Zahlenmengen



Ende des 19. Jahrhundert: Gibt es eine Möglichkeit, \mathbb{N} zu konstruieren?

Peano-Axiome

Idee: Konstruiere mittels Axiomen eine Menge \mathbb{N} , die sich genau so verhält wie die seit unserer Kindheit vertrauten natürlichen Zahlen.

Peano¹-Axiome

- (P1) 0 ist eine natürliche Zahl.
- (P2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl $S(n)$ als Nachfolger.
- (P3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- (P4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
- (P5) Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$0 \in M \quad \wedge \quad (n \in M \Rightarrow S(n) \in M)$$

folgt $M = \mathbb{N}$. (*Induktionsaxiom*)

¹Giuseppe Peano (1852–1932)

Natürliche Zahlen

Bemerkungen

Mathematisch präziser formuliert lauten die Peano-Axiome wie folgt:

1. In \mathbb{N} gibt es ein ausgezeichnetes Element, das mit 0 (*Null*) bezeichnet wird.
2. Jedem Element $n \in \mathbb{N}$ ist auf eindeutige Weise ein weiteres Element aus \mathbb{N} zugeordnet, das man im Allgemeinen den unmittelbaren **Nachfolger** von n nennt und mit $S(n)$ bezeichnet.
3. 0 ist kein Nachfolger.
4. Zwei verschiedene Elemente von \mathbb{N} (also zwei verschiedene natürliche Zahlen) können nicht denselben Nachfolger haben. In Symbolen geschrieben: $S(m) = S(n) \implies m = n$.
5. Induktionsprinzip: Siehe unten.

Addition

Natürliche Zahlen sollen auch addiert bzw. multipliziert werden können.

Definition (Addition natürlicher Zahlen)

Es sei $m, n \in \mathbb{N}$. Man setzt:

$$\begin{aligned}m + 0 &:= m, \\m + S(n) &:= S(m + n)\end{aligned}$$

Hierdurch wird die Abbildung

$$\text{add} := \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) \mapsto m + n \end{cases}$$

definiert, die als **Addition** auf \mathbb{N} bezeichnet wird.²

²Die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n ist als $m + n$ eindeutig definiert.

Multiplikation

Natürliche Zahlen sollen auch addiert bzw. multipliziert werden können.

Definition (Multiplikation natürlicher Zahlen)

Es sei $m, n \in \mathbb{N}$. Man setzt:

$$0 \cdot n := 0.$$

$$S(m) \cdot n := m \cdot n + n.$$

Hierdurch wird die Abbildung

$$\text{mult} := \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) \mapsto m \cdot n \end{cases}$$

definiert, die als **Multiplikation** auf \mathbb{N} bezeichnet wird.³

³Das Produkt zweier natürlicher Zahlen m und n ist als $m \cdot n$ eindeutig definiert.

Rechnen auf \mathbb{N}

Addition & Multiplikation

Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen.

▶ Für die **Addition** auf \mathbb{N} gelten folgende Gesetze:

1. Assoziativität: $(m + n) + p = m + (n + p)$

2. Kommutativität: $m + n = n + m$

Insbesondere gilt $n + 0 = 0 + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

▶ Für die **Multiplikation** auf \mathbb{N} gelten folgende Gesetze:

3. Assoziativität: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

4. Kommutativität: $m \cdot n = n \cdot m$

Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n$$

▶ In Verbindung beider Operationen auf \mathbb{N} gilt ferner:

5. Distributivität: $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Ordnung der natürlichen Zahlen

Definition

Mit Hilfe der Addition auf \mathbb{N} lässt sich eine **Ordnung** der natürlichen Zahlen einführen.

Definition (Ordnung auf \mathbb{N})

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann heißt a **kleiner oder gleich** b , falls ein $x \in \mathbb{N}$ mit

$$a + x = b$$

existiert. Man schreibt: $a \leq b$.

Das Symbol $a < b$ (a ist **echt kleiner als** b) bedeutet $a \leq b$ und $a \neq b$, also $a + x = b$, $x \neq 0$.⁴

⁴Analog: $a \geq b$ und $a > b$.

Ordnung der natürlichen Zahlen

Bemerkung

Es seien stets $a, b, c \in \mathbb{N}$ gegeben.

1. Transitivität:

$$a < b \text{ und } b < c \implies a < c$$

2. Zwischen $a, b \in \mathbb{N}$ besteht **genau eine** der drei Relationen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

3. $a < b \implies a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{N}$.

4. $a < b, c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$.

5. Die Gleichung $a + x = b$ besitzt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{N}$. Ist also $a \leq b$, so ist x mit $a + x = b$ eindeutig bestimmt

$$x =: b - a \text{ (Differenz)}$$

Einschub

Summen- und Produktzeichen

Definition (Summen- und Produktzeichen)

1. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. Für jede ganze Zahl k mit $m \leq k \leq n$ sei a_k eine reelle Zahl (vornehm: $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \mapsto a_k$). Dann setzt man:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

2. Analog definiert man:

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Bemerkung

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, wird **Folge** genannt. Kurz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Einschub

Beispiele für Folgen

Wie lautet die explizite Formel der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die angegebenen Zahlenfolgen?

(1) $1, 2, 3, 4, \dots$ $a_n =$

(2) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ $a_n =$

(3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ $a_n =$

(4) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ $a_n =$

Vollständige Induktion

Beispiel: Der Schüler Carl Friedrich Gauß

Aufgabe (Der Schüler CFG)

Berechnen Sie bitte die Summe aller Zahlen von 1 bis 100.

Hinweis: Gauß schaffte das als Schüler (angeblich) in wenigen Minuten.

Vollständige Induktion

Beweisprinzip

Satz (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ (oder sogar $n_0 \in \mathbb{Z}$) und $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$ eine Aussage. Um die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(IA) **Induktionsanfang:** $A(n_0)$ ist korrekt.

(IS) **Induktionsschritt:** Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt:
Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch $A(n+1)$ richtig.

Vollständige Induktion

Beispiel: Der Student Carl Friedrich Gauß

Zurück zu dem Beispiel vom Schüler Gauß. Er ist mittlerweile groß geworden und fragt sich, ob seine Lösung denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie lautet die Aussage $A(n)$, die er beweisen muss?

Vollständige Induktion

Beispiel: Der Student Carl Friedrich Gauß

Aufgabe (Der Student CFG)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$A(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Vollständige Induktion

Beispiel: Ungerade Zahlen und Quadratzahlen

Aufgabe (Summe ungerader Zahlen)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$A(n) : \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (\mathbb{N} und vollständige Induktion)

1. Sie definieren Standard-**Zahlenmengen** und nennen Beispiele.
2. Sie charakterisieren **Rechenregeln** für $+$ und \cdot auf \mathbb{N} .
3. Sie definieren eine **Ordnung** auf \mathbb{N} durch die Addition auf \mathbb{N} .
4. Sie finden explizite Berechnungsvorschriften für gegebene **Folgen**.
5. Sie formen Summen und Produkte in Darstellungen mit **Summen-** und **Produktzeichen** um und vice versa.
6. Sie sehen konkreten Beispielen an, dass **vollständige Induktion** ein geeignetes Beweisverfahren darstellt und wenden diese darauf an.

Inhalt

von Kapitel 3: Zahlen und Zahlendarstellungen

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Peano-Axiome

Rechenoperationen

Ordnungsrelation

Vollständige Induktion

Zahlendarstellungen

Stellenwertsysteme

b -adische Darstellung von Zahlen

Umwandlung zwischen Zahlensystemen

Zahlendarstellungen

Historie

- ▶ Eine Zahl x wird durch x -fache Wiederholung eines speziellen Zeichens dargestellt: Z.B. $|||$ $|||$.
- ▶ Solche Strichsysteme wurden schon sehr früh von der Menschheit verwendet.
- ▶ Auch heute noch: Kaffeeliste, Inventur,...
- ▶ Ist praktisch, aber bei großen Zahlen schwierig.
- ▶ Vorteil: Addition ergibt sich ganz natürlich.

Zahlendarstellungen

Römische Zahlen

Zahlensymbol	I	V	X	L	C	D	M
Wertigkeit	1	5	10	50	100	500	1000

- ▶ Bei römischen Zahlen ist die **relative** Position wichtig:

$$XL = 50 - 10 = 40, \quad LX = 50 + 10 = 60$$

Zahlendarstellungen

Dezimalsystem

- Das von uns verwendete **Dezimalsystem** kennt 10 **Ziffernsymbole**:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

- Dabei ist die **absolute** Position der Zeichen wichtig, um den Zahlenwert zu ermitteln:

$$123 \neq 321$$

$$5124 = 5 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

- Der Zahlenwert w berechnet sich also aus den Ziffern z_{n-1}, \dots, z_1, z_0 einer Dezimalzahl:

$$w = z_{n-1} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{n-1} + \dots + z_2 \cdot 100 + z_1 \cdot 10 + z_0 \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot 10^i$$

Zahlendarstellungen

b -adische Darstellung

Das Dezimalsystem ist ein **Stellenwertsystem** zur Basis 10.

Definition (b -adische Darstellung)

Sei $b > 1$ eine natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Menge

$$\{0, \dots, b - 1\}$$

Alphabet des b -adischen Zahlensystems (zur Basis b).

Beispiele

Dezimalsystem	$b = 10$	→	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Binärsystem	$b = 2$	→	$\{0, 1\}$
Oktalsystem	$b = 8$	→	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Hexadezimalsystem	$b = 16$	→	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Zahlendarstellungen

b -adische Darstellung

- ▶ Der Zahlenwert w berechnet sich im Dezimalsystem gemäß

$$w = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot 10^i$$

- ▶ Dies lässt sich nun verallgemeinern! Für beliebige Basen $b > 1$ ($b \in \mathbb{N}$) gilt

$$w = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot b^i,$$

wobei n die Anzahl der Stellen der Zahl w angibt.

- ▶ Zifferschreibweise

$$w = (z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0)_b$$

Zahlendarstellungen

Binärsystem (Dualsystem)

- ▶ Die Basis $b = 2$ mit dem Alphabet $\{0, 1\}$ hat in der Informatik eine besondere Bedeutung, da sich die beiden Symbole leicht elektrisch kodieren lassen:
 - ▶ "kein Strom fließt" entspricht der 0
 - ▶ "Strom fließt" entspricht der 1
- ▶ Jede Stelle einer Binärzahl wird als **Bit** (= binary digit) bezeichnet.
- ▶ 1 Bit ist demnach die kleinste Informationsmenge, die gespeichert werden kann.
- ▶ 8 Bits werden als 1 **Byte** bezeichnet.
- ▶ Die Bitfolge $(01001101)_2$ entspricht der Dezimalzahl $(77)_{10}$, denn:

Zahlendarstellungen

Oktal- und Hexadezimalsystem

▶ **Oktalsystem:**

Die Oktalzahl $(115)_8$ entspricht der Dezimalzahl $(77)_{10}$, denn:

▶ **Hexadezimalsystem:**

Die Zahl $(4D)_{16}$ entspricht der Dezimalzahl $(77)_{10}$, denn:

Zahlendarstellungen

Interaktiver Zähler

- ▶ Unter dem nachstehenden Link finden Sie einen interaktiven Zähler für Zahlssysteme mit verschiedenen Basen:

```
https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/  
lectures/ti1/code/basecounter/index.html
```

Probieren Sie es aus!

Zahlendarstellungen

Rationale Zahlen

- ▶ Eine **rationale** Zahl $w \in \mathbb{Q}$ kann ebenfalls in b -adischer Darstellung angegeben werden.
- ▶ Dazu wird der Nachkomma-Anteil durch negative Exponenten repräsentiert.
- ▶ Beispiel:

$$913,64 = 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

- ▶ Dies lässt sich wiederum verallgemeinern:

$$\begin{aligned} w &= (z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0, z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m}) \\ &= \sum_{i=-m}^{n-1} z_i \cdot b^i \end{aligned}$$

wobei n die Anzahl der Vorkommastellen und m die Anzahl der Nachkommastellen angibt.

Zahlendarstellungen

Rationale Zahlen – Beispiel

Aufgabe (Umrechnung Binärzahl in Dezimalzahl)

Berechnen Sie die Dezimaldarstellung von $(11, 101)_2$.

Zahlendarstellungen

Dead People

*“If only **dead** people understand hexadecimal, how many people do understand hexadecimal then?”*

Berechnen Sie's doch bitte!

$$(DEAD)_{16} =$$

Zahlendarstellungen

Umwandlung zwischen Zahlensystemen

Aufgabe (Dezimaldarstellung → Binärdarstellung)

Berechnen Sie die Binärdarstellung von $(206)_{10}$.

Zahlendarstellungen

Umwandlung zwischen Zahlensystemen

Aufgabe (Dezimaldarstellung → Hexadezimaldarstellung)

Berechnen Sie die Hexadezimaldarstellung von $(206)_{10}$.

Zahlendarstellungen

Umwandlung zwischen Zahlensystemen

Aufgabe (Binärdarstellung → Hexadezimaldarstellung)

Berechnen Sie die Hexadezimaldarstellung von $(1100\ 1110)_2$ und vice versa.

Tipp: Hier gibt es einen Trick...

Zahlendarstellungen

Umwandlung bei rationalen Zahlen

Aufgabe (Dezimaldarstellung → Binärdarstellung)

Wandeln Sie die Zahl $(0,6875)_{10}$ in Binärdarstellung um.

Zahlendarstellungen

Umwandlung bei rationalen Zahlen

Aufgabe (Dezimaldarstellung → Binärdarstellung)

Wandeln Sie die Zahl $(0,1)_{10}$ in Binärdarstellung um.

Zahlendarstellungen

Rundungsfehler

- ▶ Es kann bei rationalen Zahlen aufgrund von Periodizität in der Binärdarstellung zu Rundungsfehlern kommen.
- ▶ Diese Rundungsfehler müssen bei der Entwicklung von Software und Hardware (also beim Programmieren) berücksichtigt werden! Sonst verhält sich das System anders als erwartet.
- ▶ Ebenso ist die Darstellung von Zahlen sowohl nach unten als auch nach oben durch die endliche Anzahl von Bits (32 Bit oder 64 Bit Systeme) beschränkt.

Zahlendarstellungen

Aufgabe

Aufgabe (Umwandlung einer rationalen Zahl)

Wandeln Sie die Zahl $(234, 375)_{10}$ in Binär- und anschließend in Hexadezimaldarstellung um.

Zahlendarstellungen

Danksagung

Vielen Dank an Thorsten Thormälen für die Inspiration zu diesen Folien!

<https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae>

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Zahlendarstellungen)

1. Sie nennen historische **Zahlendarstellungen** und ggf. Vor- und Nachteile.
2. Sie charakterisieren die Zifferdarstellung einer **Dezimalzahl** und stellen Sie als Summe dar.
3. Sie erweitern die Dezimaldarstellung auf Zahlendarstellungen zu **beliebigen Basen b** und dazugehörigen **Alphabeten**.
4. Sie stellen **rationale Zahlen** b -adisch dar.
5. Sie **rechnen** eine Zahl in gegebener b_1 -adischen Darstellung in b_2 -Darstellung **um** und vice versa.
6. Sie erläutern, warum es bei der Zahlendarstellung am Computer zu **Rundungsfehlern** kommt.