

---

## Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 8

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** In algebraischen Gleichungen mit ausschließlich reellen Koeffizienten treten komplexe nichtreelle Lösungen paarweise konjugiert auf.

(a) Berechnen Sie für das Polynom

$$p_3(z) = z^3 + 3 \cdot z^2 + 9 \cdot z - 13 \quad (z \in \mathbb{C})$$

die Produktdarstellung in Linearfaktoren.

(b) Zeigen Sie, dass  $z_1 = 2 - i$  eine Lösung der Gleichung

$$z^4 - \frac{7}{2} \cdot z^3 - 2 \cdot z^2 + \frac{45}{2} \cdot z - 25 = 0$$

ist. Zerlegen Sie das Polynom auf der linken Seite der Gleichung in Linearfaktoren.

(c) Zerlegen Sie das Polynom  $p_4(z) = z^4 + 4$  in zwei reelle quadratische Faktoren.

(d) Prüfen Sie, welche der ganzen Zahlen  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$  und  $x_3 = -5$  Lösungen der algebraischen Gleichung  $p_4(x) = 0$  mit

$$p_4(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

sind und dividieren Sie  $p_4(x)$  durch die Terme  $(x - x_j)$  für jedes  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Aufgabe 2:** Spalten Sie so oft wie möglich die Nullstelle  $x = -1$  vom Polynom  $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$  ab und faktorisieren Sie es!

**Aufgabe 3:** Zerlegen Sie die nachstehenden rationalen Funktionen  $f : x \mapsto y = f(x)$  mit  $x \in D \subset \mathbb{R}$  in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochen rationalem Anteil.

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen qualitativ (ohne Funktionswerte zu bestimmen).

$$f(x) = \frac{x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4}{x^4 + 2x^2 + 1} \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{x^8 - x^4 + 2x - 1}{x^2 - 1} \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (3x - 4) \cdot (x^2 + 1)}{(2x - 6) \cdot (x^2 - 1)} \tag{3}$$

**Aufgabe 4:** Gegeben ist die reelle Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(x) = x^5 - 6 \cdot x^4 + 12 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 27 \cdot x$$

Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens alle Nullstellen von  $h$ .

---

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(a)  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

(b)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

(c)  $x^2 + x + 1 = 0$

(d)  $3x^2 + 3x - 6 = 0$

**Aufgabe 6:** Gegeben ist die algebraische Gleichung  $p(z) = 0$  mit

$$p(z) = z^5 - 4 \cdot z^4 + 6 \cdot z^3 - 6 \cdot z^2 + 5 \cdot z - 2, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

- (a) Entscheiden und begründen Sie, welche der Zahlen  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  bzw.  $\pm 3$  Lösungen der Gleichung  $p(z) = 0$  sind und welche nicht.
- (b) Berechnen Sie alle Lösungen von  $p(z) = 0$  mittels Polynomdivision oder eines entsprechenden (schriftlichen!) Verfahrens. Zerlegen Sie das Polynom (4) in Linearfaktoren.

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Zahlen  $z$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

(a)  $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$

(b)  $|z| = 2 \quad \wedge \quad (z - i) \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 8:** Gegeben ist die reelle Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(x) = x^5 - x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$$

Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens alle Nullstellen von  $h$ .