

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

3. Übung: Differentialrechnung in mehreren Variablen

Aufgabe 1

Ermitteln Sie jeweils sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

- (a) $f(x, y) = 4 + x^3 + 3x^2y^3 + y^3$, (b) $f(x, y) = x \sin(2x + y)$, (c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$,
(d) $f(x, y) = x^y$, (e) $f(x, y) = xe^{y/x}$, (f) $f(x, y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x \ln y$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.

- (a) Zeichnen Sie eine Karte (Höhenlinienbild) der Funktion.
(b) Vergewissern Sie sich, dass der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^\top$ auf dem Graphen von f liegt.
(c) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ den Gradienten und die Gleichung der Tangentialebene.
(d) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ die Ableitung in Richtung $\mathbf{a} = (1, 0)^\top$. In welcher Richtung besitzt die Tangentialebene den steilsten Anstieg, und wie kann man diesen berechnen?
(e) Finden Sie einen Richtungsvektor, dessen Richtungsableitung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ genau $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 4|y - 2z|.$$

- (a) Für welche Richtungen $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ besitzt f in $(0, 0, 0)^\top$ eine Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(0, 0, 0)$?
(b) Was können Sie daraus bzgl. der partiellen und totalen Differenzierbarkeit von f in $(0, 0, 0)^\top$ schlussfolgern?
(c) Was ändert sich bzgl. der Differenzierbarkeit in $(0, 0, 0)^\top$, wenn wir die Funktion leicht abändern zu

$$g(x, y, z) = 3x^2 \cdot |y - 2z|?$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

- (a) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$
(b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^\alpha$ für $\alpha > 0$
(c) $f(\mathbf{x}) = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$

mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und einem festen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5

Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl c . Zeigen Sie dass

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, t) := f(x + ct) + g(x - ct)$$

die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.