TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Fleurianne Bertrand
C. Bombach, T.-C. Riemer, Dr. M. Winkler

4. Dezember 2023

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

5. Übung: Extremwertaufgaben (Lösungen)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Punkte, in denen sich die folgenden Gleichungen nach y auflösen lassen.

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $y\mathrm{e}^y = x$, (c) $x^y = y^x$, $x, y > 0$.

Lösung:

(a) Wir setzen $F(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2 = 0$ und erhalten damit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y.$$

Es gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$ für $x = y$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ für $x \neq y$.

(b) Wir setzen $F(x,y) = y\mathrm{e}^y - x = 0$ und erhalten damit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^y.$$

Es gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$ nur für $y = -1$ (und damit $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$) und sonst $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

(c) Wir setzen $F(x,y) = x^y - y^x = 0$, was uns $x^y = y^x$ liefert. Mit der Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x - xy^{x-1}$$

erhalten wir damit $x^y \ln x - xy^{x-1} = y^x \ln x - xy^{x-1} = 0$, was äquivalant zu $y = \frac{x}{\ln x}$ ist. Ergo ist die Funktion in der Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^y = y^x, y \neq \frac{x}{\ln x}\}$$

nach y auflösbar.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen $y = y(x)$ der durch $\mathrm{e}^{xy} - y + x = 1$ definierten Kurve in $\mathbb{R}^2$ im Punkt $x = 0$. Wie lautet die zweite Ableitung $y''(0)$?

Lösung:

Wir setzen $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - y + x - 1 = 0$ und erhalten damit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\mathrm{e}^{xy} + 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} - 1.$$

Es gilt für $x_0 = 0$, dass dann $F(x_0, y_0) = \mathrm{e}^0 - y_0 + 0 - 1 = 1 - y_0 - 1 = -y_0$, ergo ist $y_0 = y(0) = 0$. Damit ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\mathrm{e}^0 - 1 = -1 \neq 0$ und die Kurve lokal nach y auflösbar. Deren Ableitung ist nach Satz 9.27

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{y_0\mathrm{e}^{x_0 y_0} + 1}{x_0\mathrm{e}^{x_0 y_0} - 1} = 1.$$

Die Tangente hat somit die Gleichung $t(x) = x$. Die zweite Ableitung erhält man, wenn man $y'(x)$ einfach nochmal nach x differenziert. Dabei ist allerdings zu beachten, dass $y = y(x)$, wir müssen also die Kettenregel anwenden:

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{y(x)\mathrm{e}^{xy(x)}+1}{x\mathrm{e}^{xy(x)}-1}\right) \\
&= -\frac{\left(y'(x)\mathrm{e}^{xy(x)} + y(x)\mathrm{e}^{xy(x)}[y(x)+xy'(x)]\right)\left(x\mathrm{e}^{xy(x)}-1\right)}{(x\mathrm{e}^{xy(x)}-1)^2} \\
&\quad + \frac{\left(\mathrm{e}^{xy(x)} + x\mathrm{e}^{xy(x)}[y(x)+xy'(x)]\right)\left(y(x)\mathrm{e}^{xy(x)}+1\right)}{(x\mathrm{e}^{xy(x)}-1)^2}
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $x = 0$, $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ liefert

$$
y''(0) = -\frac{(1\mathrm{e}^0+0)\,(0-1)}{(0-1)^2} + \frac{(\mathrm{e}^0+0)\,(0+1)}{(0-1)^2} = 2.
$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Lösung:

Bestimmung der stationären Punkte:

$$
\begin{aligned}
f_x &= -2x\,\underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\
f_y &= -2y\,\underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0
\end{aligned}
$$

Damit kommt nur der Punkt $(0, 0)$ als Extrempunkt in Frage.
Betsimmung der Hessematrix in $(0, 0)$:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= (4x^2-2)e^{-(x^2+y^2)} \quad \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -2 \\
f_{yy} &= (4y^2-2)e^{-(x^2+y^2)} \quad \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2 \\
f_{xy} &= 4xye^{-(x^2+y^2)} \quad \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0 \\
f_{yx}(0,0) &= f_{xy}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Hessematrix zu

$$
H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit und damit liegt in $(0, 0)$ ein Maximum vor.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2xy + 8y^2 - 6x - 34y + \gamma$. Bestimmen Sie den reellen Parameter γ so, dass der Graph von f die Ebene $z = 7$ berührt. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts an.

Lösung:

Der Berührpunkt kann nur ein stationärer Punkt der Funktion sein. Genauer muss er sogar ein Extrempunkt sein. Also muss die Funktion zuerst auf Extrempunkte untersucht werden.
Bestimmung der benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 2y - 6 \\ f_y &= 2x + 16y - 34 \\ f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= 16 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der stationäre Punkt als Lösung des lineraen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 2x + 16y &= 34 \end{aligned}$$

Dies liefert den stationären Punkt $(1, 2)$. Die Hessematrix ergibt sich zu

$$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit (Sylvester-Kriterium) und damit liegt in $(1, 2)$ ein Minimum vor. Dieses Minimum hat den Funktionswert $f(1, 2) = 1 + 4 + 32 - 6 - 68 + \gamma = \gamma - 37$. Damit der Graph von f die Ebene $z = 7$ nur berührt, muss $f(1, 2) = 7$ gelten, was nur für $\gamma = 44$ zutrifft.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - \frac{1}{4}x^2$ keine lokalen Extrema besitzt.
(Hinweis: Man muss nicht die stationären Punkte berechnen, um diese Aufgabe zu lösen.)

Lösung:

Für die Funktion gilt:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hessematrix dieser Funktion ist also konstant und indefinit. Sollte es also stationäre Punkte (in $(0, 0)$ liegt tatsächlich ein stationärer Punkt vor) geben, so besitzen diese eine indefinite Hessematrix und können somit keine lokalen Extrema sein.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 + x^2 - \ln(x + y)$.

Lösung:

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - \frac{1}{x + y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2xy = 1 \\ f_y &= 2y - \frac{1}{x + y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 + 2xy = 1 \end{aligned}$$

Ergo, muss gelten

$$2x^2 + 2xy = 1 = 2y^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad |x| = |y|$$

und da wir nur positive x, y betrachten, also $x = y$. Damit folgt

$$2x^2 + 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2},$$

und mit kommt nur der Punkt $(0.5, 0.5)$ als Extrempunkt in Frage.
Bestimmung der Hessematrix in $(0.5, 0.5)$:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= 2 + \frac{1}{(x+y)^2} \quad &&\Rightarrow f_{xx}(0.5, 0.5) = 3 \\
f_{yy} &= 2 + \frac{1}{(x+y)^2} \quad &&\Rightarrow f_{yy}(0.5, 0.5) = 3 \\
f_{xy} &= \frac{1}{(x+y)^2} \quad &&\Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1 \\
f_{yx}(0.5, 0.5) &= f_{xy}(0.5, 0.5) = 1
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Hessematrix zu

$$H_f(0.5, 0.5) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nach Satz 9.33 ($a_{1,1} = 3 > 0$ und $\det(H_f(0.5, 0.5)) = 9 - 1 = 8 > 0$) positiv definit und damit liegt in $(0.5, 0.5, 0.25)$ ein Maximum vor.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das maximale Produkt xyz dreier nichtnegativer Zahlen x, y und z, deren Summe gleich 105 ist.

Lösung:

Wir erhalten das folgende Extremalproblem mit einer Gleichungsnebenbedingung.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= xyz \to \max \\
g(x, y, z) &= x + y + z - 105 = 0
\end{aligned}$$

sowie $x, y, z \geq 0$. Die Lagrange-Funktion $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ liefert folgende Bedingung für einen stationären Punkt:

$$\begin{aligned}
L_x: &\quad 0 = yz + \lambda \\
L_b: &\quad 0 = xz + \lambda \\
L_c: &\quad 0 = xy + \lambda \\
L_\lambda: &\quad 0 = x + y + z - 105
\end{aligned}$$

Da man die Fälle $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ als Maximalpunkte ausschließen kann (da das Produkt dann 0 ist). Muss also gelten:

$$xy = xz = yz = -\lambda$$

Da x, y und z alle von 0 verschieden sind muss gelten $x = y = z$. Da die letzte Bedingung (Summe muss 105 ergeben) noch erfüllt werden muss, ist das Produkt also für $x = y = z = 35$ maximal. Das Produkt beträgt dann $35^3 = 42875$.

Aufgabe 8

Ein Dosenhersteller will für seine zylindrischen Blechdosen bei einem vorgegebenen Blechverbrauch von $600\pi\,\mathrm{cm}^2$ ein möglichst großes Fassungsvermögen erreichen. Bestimmen Sie das maximale Volumen einer solchen Blechdose und die entsprechenden Abmessungen.

Hinweis: Die Oberfläche eines Zylinders der Höhe h und mit Radius r ist $2\pi r(r+h)$.

Lösung:

Die Zielfunktion ist $V(r,h) = \pi r^2 h$, welche unter der Nebenbedingung $2\pi r(r+h) = 600\pi$ maximiert werden soll. Wir erhalten das folgende Extremalproblem mit einer Gleichungsnebenbedingung:

$$\begin{aligned} V(r,h) &= \pi r^2 h \to \max \\ g(r,h) &= r(r+h) - 300 = 0 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion $L(r,h,\lambda) = V(r,h) + \lambda g(r,h)$ liefert folgende Bedingung für einen stationären Punkt:

$$\begin{aligned} L_r: &\quad 0 = 2\pi r h + \lambda(2r+h) \\ L_h: &\quad 0 = \pi r^2 + \lambda(r) = r(\pi r + \lambda) \\ L_\lambda: &\quad 0 = r(r+h) - 300. \end{aligned}$$

Da man die Fälle $r = 0$ und $h = 0$ als Maximalpunkte ausschließen kann (da das Volumen dann 0 ist), folgt aus $L_h = 0$

$$\pi r + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\pi r,$$

eingesetzt in $L_r = 0$ ergibt das

$$2\pi r h - \pi r(2r+h) = (2\pi r - \pi r)h - 2\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\pi r^2}{\pi r} = 2r,$$

welches nun in mit $L_\lambda = 0$ folgendes liefert:

$$300 = r(r+2r) = 3r^2 \quad \Rightarrow \quad 100 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 10 = |r|.$$

Damit wird das maximale Volumen also für $r = 10$ und $h = 20$ erreicht und beträgt $V(10,20) = \pi 100 \cdot 20 = 2000\pi$.