TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 6. Oktober 2023
Prof. Dr. Fleurianne Bertrand
C. Bombach, T.-C. Riemer, Dr. M. Winkler

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

1. Übung: Potenz- und Fourierreihen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzintervall zu folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

Aufgabe 2

Entwickeln Sie die folgenden reellen Funktionen um die Stelle $x_0 = 0$ in Potenzreihen und geben Sie deren Konvergenzradius an.

a) $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f_2(x) = 1 + x^2 + \mathrm{e}^{2x}$ c) $f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ d) $f_4(x) = \ln(1+x)$

Hinweis: Nutzen Sie bekannte Potenzreihenentwicklungen.

Aufgabe 3

Geben Sie für folgende Potenzreihen die Summenfunktion sowie das Konvergenzintervall an.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$

Aufgabe 4

Es sei $g(x) := x^2$ für $-\pi < x \leq \pi$. Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von g auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Gegeben ist eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \pi, & \text{für } -\pi < x \leq 0; \\ x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Ihre Fourierreihe werde mit $\hat{f}(x)$ bezeichnet. Geben Sie $\hat{f}(3\pi)$ und $\hat{f}(4\pi)$ an.

Aufgabe 6

Es sei eine 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x, & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion f gerade oder ungerade?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Nutzen Sie die berechnete Fourierreihe um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 7

Die Fourierreihe einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

kann man auch mittels der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathrm{i}kx}.$$

(a) In welchen Zusammenhang stehen die Koeffizienten a_k, b_k und c_k?

(b) Berechnen Sie mittels der komplexen Fourierreihe die Koeffizienten a_k, b_k der trigonometrischen Fourierreihe von

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$