TU Chemnitz – Professur Numerik partieller Differentialgleichungen 24. April 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

2. Übung: Integralsätze

Aufgabe 1

Berechne alle Doppelpunkte der Kurven

a) $\Gamma := \{\boldsymbol{x}(t) := \begin{bmatrix}\sin(t)\\ t^2\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$,

b) $\Gamma := \{\boldsymbol{x}(t) := \begin{bmatrix}\sin(t)\\ \sin(2t)\end{bmatrix} : t \in [0, 2\pi]\}$.

Aufgabe 2

Überprüfe mittels Satz 13.8, sowie über Berechnung des Kurvenintegrals über die geschlossene Kurve $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, ob folgende Vektorfelder Potentialfelder (Gradientenfelder) sind:

(a) $\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix}$, (b) $\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{bmatrix}x + y\\ x\,y\end{bmatrix}$, (c) $\boldsymbol{v}(x, y) = -\dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$,

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{bmatrix}, 0 \le t \le 2\pi$$

berandet wird. Benutzen Sie den Satz von Green bzw. die Flächeninhaltsformel.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie den Satz von Green, indem Sie die folgenden Kurvenintegrale $\int_\gamma \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ einmal direkt und einmal als Doppelintegral über den von der Kurve γ eingeschlossenen Bereich berechnen:

a) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}x - y\\ xy\end{bmatrix}$, γ sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0), (1, 3)$,

b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-y^2\\ x^2\end{bmatrix}$, γ sei der Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Kugelkappe

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta, y = \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta, z = \sqrt{2}\cos\theta, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}.$$

$\boldsymbol{v}$ besitzt das Vektorpotential $\boldsymbol{w} = (xz, xy, yz)^T$. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{v}$ durch S. Hilft Ihnen hier möglicherweise ein Integralsatz?

Aufgabe 6

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ für

(a) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $S : x_1 + x_2 + x_3 = a$ $(a > 0)$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $\boldsymbol{n}$ zeige nach oben.

(b) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ $(a > 0)$, $\boldsymbol{n}$ zeige nach außen. Berechnen Sie das Integral mit und ohne Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss das Flussintegral $\int_{\partial B} \boldsymbol{v} \mathrm{d}O$

a) für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} y^2 \\ xz^3 \\ (z-1)^2 \end{bmatrix}$$

und den Bereich B, der vom Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und den Flächen $z = 1$ und $z = 5$ berandet wird, sowie

b) für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix}$$

und die Kugel B um den Ursprung mit dem Radius R.