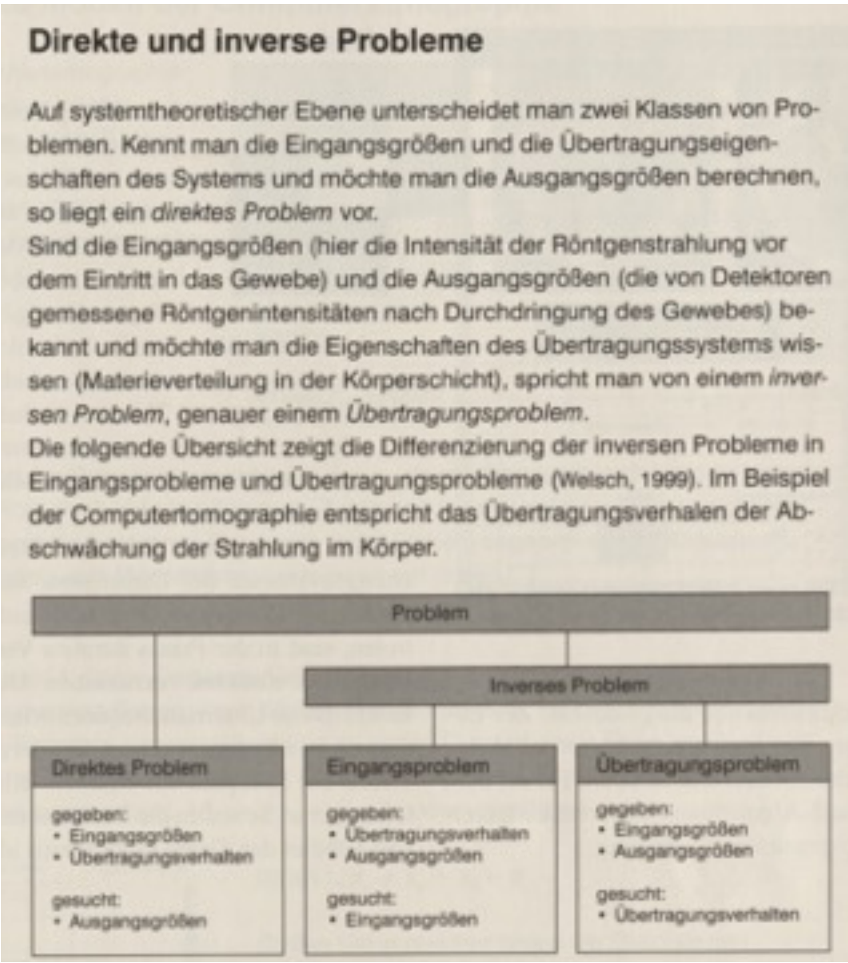
Lineare Gleichungssysteme und Computertomographie

1. Einleitung

Auf den ersten Blick haben Mathematik und Medizin nicht allzu viel gemeinsam. Schon die Bezeichnung der Mathematik als Hilfswissenschaft lässt jedoch vermuten, dass auch Mediziner:innen mathematische Inhalte benötigt, um Menschen zu helfen. Dies geht schon bei Berechnungen für Dosen von Medikamenten los und endet in komplexen Berechnungen von beliebig großen linearen Gleichungssystemen für die Darstellung eines Bildes einer Computertomographie.

Die Computertomographie stellt ein inverses Problem dar. „Es liegen Messdaten vor, aus denen auf die Struktur des Körpers geschlossen werden muss.“ (Obach, 2006, S. 52)



Direkte und inverse Probleme

Auf systemtheoretischer Ebene unterscheidet man zwei Klassen von Problemen. Kennt man die Eingangsgrößen und die Übertragungseigenschaften des Systems und möchte man die Ausgangsgrößen berechnen, so liegt ein *direktes Problem* vor.
Sind die Eingangsgrößen (hier die Intensität der Röntgenstrahlung vor dem Eintritt in das Gewebe) und die Ausgangsgrößen (die von Detektoren gemessene Röntgenintensitäten nach Durchdringung des Gewebes) bekannt und möchte man die Eigenschaften des Übertragungssystems wissen (Materieverteilung in der Körperschicht), spricht man von einem *inversen Problem*, genauer einem *Übertragungsproblem*.
Die folgende Übersicht zeigt die Differenzierung der inversen Probleme in Eingangsprobleme und Übertragungsprobleme (Welsch, 1999). Im Beispiel der Computertomographie entspricht das Übertragungsverhalen der Abschwächung der Strahlung im Körper.

Abbildung 1: Direkte und inverse Probleme (Obach, 2006, S. 53)

2. Einbettung in den Unterricht

Da die Tomographie auf dem Lösen von linearen Gleichungssystemen beruht, ist die folgende Unterrichtseinheit auch da einzubauen. Sie eignet sich sehr gut, um den Gauß'schen Algorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen zu festigen. Gleichzeitig lernen die Schüler:innen, wie dieser in Tabellenkalkulationsprogramme implementiert werden kann. Dabei verstehen sie, dass es sich um einen komplexen Vorgang handelt, der schon bei wenigen Schichtbildern beliebig komplex werden kann.

3. Ablauf des Unterrichtabschnittes

Zielgruppe	12. und 13. Schuljahr
Idee	Die Rekonstruktion von Daten motiviert das eigenständige Implementieren des Gauß-Algorithmus.
Zeitbedarf	12 Unterrichtsstunden[1]
Material	Arbeitsblatt 1 & Arbeitsblatt 2
Sozialformen	Partner- und Gruppenarbeit

Die Computertomographie ist einerseits sehr vielschichtig, andererseits anspruchsvoll. Wichtig ist also, das Thema möglichst praxisnah und anschaulich zu gestalten. Als Einstieg in die Thematik kann ein stiller Impuls genutzt werden. Es werden CT- und dazu im Vergleich Röntgenaufnahmen eines Schädels gezeigt. Es können beispielsweise folgende Bilder verwendet werden:

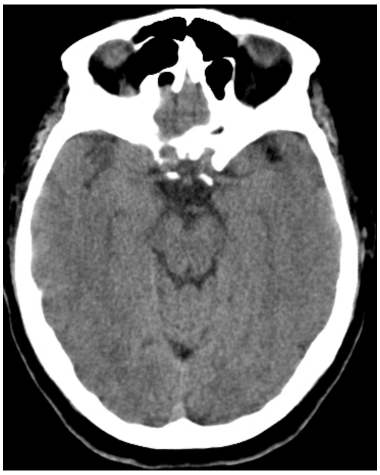


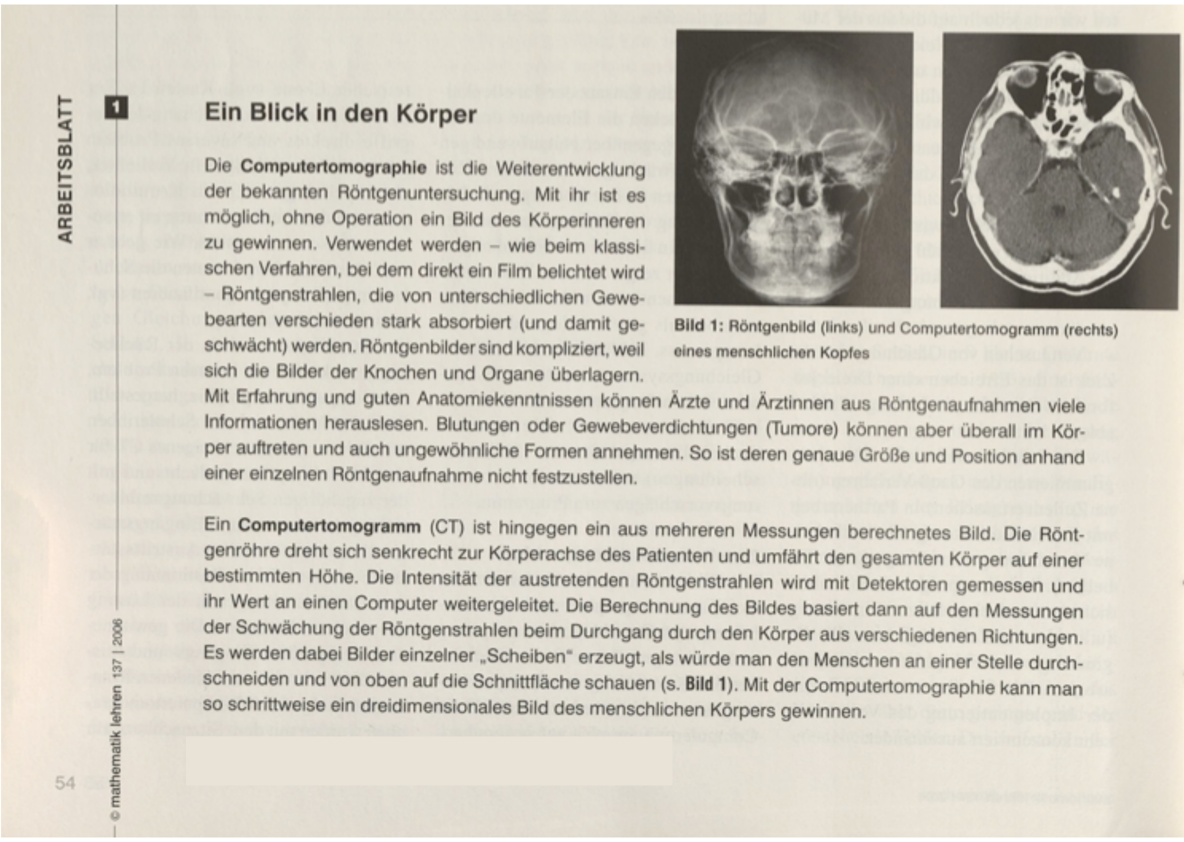
Abbildung 2: CT Schädel (Klinikum, 2022)

Abbildung 3: Schädel Röntgen (Widmer, o. J.)

[1] Laut Mathematiklehren. Kann aber beliebig gekürzt werden...

Die Schüler:innen sollen nun die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Aufnahmen beschreiben und werden erkennen, dass es sich bei der CT-Aufnahme um eine Schnittbild handelt, wohingegen die Röntgenaufnahme eine Durchleuchtung darstellt. Auch sollte diskutiert werden, wie die Aufnahmen entstanden sind. Dabei wird klar, dass CT-Aufnahmen nicht durch eine einzige Durchleuchtung entstanden sein kann. (Obach, 2006, S. 52)

Natürlich ist klar, dass nicht alle Schüler:innen das gleiche Vorwissen in Bezug auf Einsatz und vor allem Funktionsweise eines Computertomographens haben. Dazu sollte diese kurz erklärt werden, z. B. m. H. des folgenden Infotextes:


ARBEITSBLATT

1 **Ein Blick in den Körper**

Die **Computertomographie** ist die Weiterentwicklung der bekannten Röntgenuntersuchung. Mit ihr ist es möglich, ohne Operation ein Bild des Körperinneren zu gewinnen. Verwendet werden – wie beim klassischen Verfahren, bei dem direkt ein Film belichtet wird – Röntgenstrahlen, die von unterschiedlichen Gewebearten verschieden stark absorbiert (und damit geschwächt) werden. Röntgenbilder sind kompliziert, weil sich die Bilder der Knochen und Organe überlagern. Mit Erfahrung und guten Anatomiekenntnissen können Ärzte und Ärztinnen aus Röntgenaufnahmen viele Informationen herauslesen. Blutungen oder Gewebeverdichtungen (Tumore) können aber überall im Körper auftreten und auch ungewöhnliche Formen annehmen. So ist deren genaue Größe und Position anhand einer einzelnen Röntgenaufnahme nicht festzustellen.

Bild 1: Röntgenbild (links) und Computertomogramm (rechts) eines menschlichen Kopfes

Ein **Computertomogramm** (CT) ist hingegen ein aus mehreren Messungen berechnetes Bild. Die Röntgenröhre dreht sich senkrecht zur Körperachse des Patienten und umfährt den gesamten Körper auf einer bestimmten Höhe. Die Intensität der austretenden Röntgenstrahlen wird mit Detektoren gemessen und ihr Wert an einen Computer weitergeleitet. Die Berechnung des Bildes basiert dann auf den Messungen der Schwächung der Röntgenstrahlen beim Durchgang durch den Körper aus verschiedenen Richtungen. Es werden dabei Bilder einzelner „Scheiben" erzeugt, als würde man den Menschen an einer Stelle durchschneiden und von oben auf die Schnittfläche schauen (s. **Bild 1**). Mit der Computertomographie kann man so schrittweise ein dreidimensionales Bild des menschlichen Körpers gewinnen.

54 © mathematik lehren 137 | 2006

Abbildung 4: Arbeitsblatt 1 (angepasst nach (Obach, 2006, S. 54)

Nun muss das Problem noch mathematisch modelliert werden: Die grundsätzliche Idee ist, dass das zu untersuchende Objekt aus mehreren Richtungen senkrecht zur Körperachse durchleuchtet wir. Zur Vereinfachung wird die somit entstehende zu untersuchende Fläche in (nur[2]) neun Quadrate aufgeteilt. Beim Durchtritt der Röntgenstrahlung durch das Material werden die Strahlen geschwächt. Diese Schwächung ist abhängig von der Durchlässigkeit des Materials. Je nach Richtung der Röntgenstrahlquelle sind auch die Durchlässigkeiten unterschiedlich. Somit entstehen beim Durchleuchten unterschiedliche Schwächungsgleichungen, also Gleichungen, die beschreiben, wie stark der Röntgenstrahl nach Durchgang durch unterschiedlich viele Quadrategeschwächt wurde. Durch Drehung des Röntgenapparats werden die Wege, die ein Röntgenstrahl durch ein Quadrat geht, unterschiedlich lang. Dies wird der Einfachheit halber

[2] Hier sollte unbedingt betont werden, dass dies wirklich nur eine Vereinfachung ist und die reale CT-Aufnahme eine Aufteilung in deutlich mehr Quadrate erfordert.

vernachlässigt. Bei drei Durchleuchtungsrichtungen erhält man somit ein 9x9-Gleichungssystem. Ein normales Computerbild besteht natürlich nicht nur aus 9x9-Pixeln. Somit wird schnell klar, welche riesige Anzahl an Gleichungen gelöst werden müssen, um ein CT-Bild darstellen zu können.

Den Schüler:innen wird dieses Problem verdeutlicht, indem sie Arbeitsblatt 2 bearbeiten:

ARBEITSBLATT **2**

Ein mathematisches Modell der Computertomographie

Um das Prinzip der Computertomographie zu verstehen, betrachten wir zunächst einen quadratischen Körper, der in 9 kleine Quadrate unterteilt ist.
Die Schwächung der Röntgenstrahlung wird in jedem Feld durch die Schwächungszahl x_i beschrieben.

Grauton						
Schwächungszahl	0	1	2	3	4	5

Ziel ist nun die Bestimmung der Schwächungszahlen $x_1, \ldots, x_9$, da sie charakteristisch für jede Materieart sind und die Struktur der Körperschicht widerspiegeln. Zur Erstellung eines Computertomogramms werden den Schwächungszahlen bestimmte Grauwerte (oder Farben) zugeordnet. Die Bildsequenz veranschaulicht den Übergang vom Modelltomogramm zu einem realen CT.

Erste Messung
Betrachten wir zunächst Strahl 1. Seine Eingangsstärke ist 10. Beim Durchgang durch das erste Quadrat wird er um einen gewissen Betrag von x_1 Einheiten abgeschwächt. Im zweiten Quadrat wird der Strahl wiederum um x_2 Einheiten abgeschwächt und im dritten Quadrat um x_3 Einheiten. Nun wird er vom Detektor mit der Austrittsstärke 2 empfangen. Diese schrittweise Abschwächung können wir mit einer linearen Gleichung beschreiben: $10 - x_1 - x_2 - x_3 = 2$, oder umgeformt

Strahl I: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ (I)

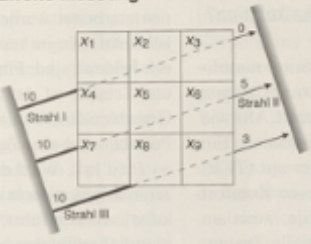
Stellen Sie in gleicher Weise die Gleichungen für die Strahlen II und III auf.

Strahl II: .... (II)

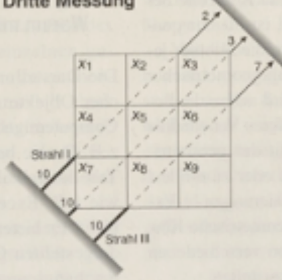
Strahl III: .... (III)

Aus diesen drei Messungen erhalten Sie also drei lineare Gleichungen mit 9 Unbekannten.
Um die unbekannten Schwächungszahlen zu bestimmen, benötigen Sie weitere Gleichungen.
Dazu wird der Röntgenapparat in zwei Schritten leicht gedreht:

Zweite Messung



Dritte Messung



→ Notieren Sie für alle drei Messungen die Schwächungsgleichungen.
Stellen Sie die gewonnenen Informationen in einem Gleichungssystem in Normalform zusammen.

Eigenes Modell zur Computertomographie
→ Erstellen Sie einen eigenen „Modellkopf" mit Schwächungszahlen zwischen 0 und 5 und berechnen Sie die Austrittsstärke der Röntgenstrahlen für die drei Messungen. Notieren Sie die Austrittsstärken an dem jeweiligen Strahl. Lassen Sie Ihren Modellkopf (das Muster der Schwächungszahlen) von einem Mitschüler, einer Mitschülerin rekonstruieren.

Abbildung 5: Arbeitsblatt 2 (Obach, 2006, S. 55)

Die Lösung des Gleichungssystems wird mit des Gauß-Algorithmus ermittelt. Und hier wird auch schnell klar, dass ein 9x9-System nur sehr aufwendig per Hand gelöst werden kann. Die Tabellenkalkulation schafft dabei Abhilfe. Die Schüler:innen sollen den Gauß-Algorithmus in eine Tabellenkalkulationssoftware implementieren. Dies geschieht in Partner:innen-Arbeit. Mit Hilfe der Implementierung setzen sich die Jugendlichen intensiv mit dem Algorithmus auseinander und vertiefen diesen. Auch bietet diese Programmierphase kommunikative Fortschritte, da sie gegenüber dem Teammitglied argumentieren müssen.

4. Ergänzungen

Die unterste Aufgabe auf Arbeitsblatt 2 könnte ergänzt werden, indem die Mitschüler:innen dann auch das Lösungsbild darstellen sollen. Für jede Schwächungszahl könnten verschiedene Grautöne vorgegeben werden, welche dann durch Färben von Kästchen, z. B. in Excel ein Lösungsbild ergeben.

5. Lösung des Arbeitsblatts

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}}^{=x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}}^{=y}$$

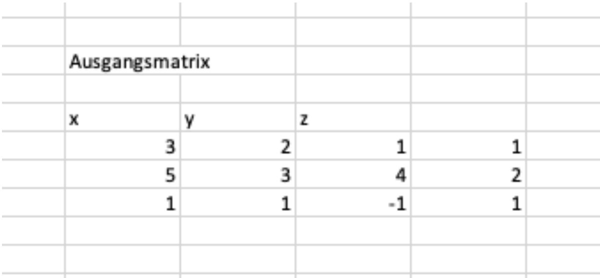
6. Alternatives Thema – gleiches Beispiel

Das 9x9-Gleichungssystem kann auch mittels der inversen Matrix berechnet werden. Dafür wird jedoch die inverse Matrix A^{-1} der Koeffizientenmatrix A benötigt:

$$x = A^{-1}y$$

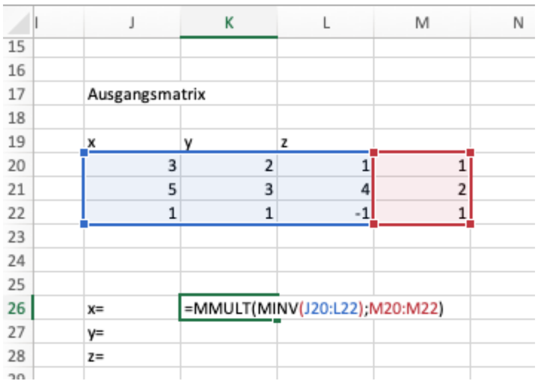
Händisch lässt diese sich beispielsweise mit dem Gauß-Jordan-Verfahren mit einer recht hohen Anzahl an Arbeitsschritten bestimmen. Mit Hilfe einer Funktion in Excel kann aber recht schnell die Lösung der o. g. Gleichung gefunden werden.

Am Beispiel eines 3x3-Gleichungssystems soll dies nun dargestellt werden. Es ist beliebig auf höhere Gleichungssystem übertragbar:



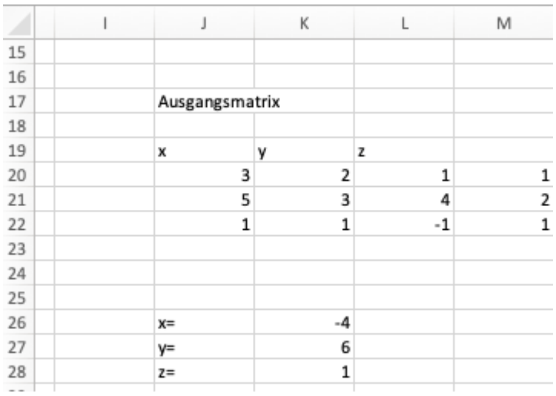
Ausgangsmatrix				
x	y	z		
	3	2	1	1
	5	3	4	2
	1	1	-1	1

Abbildung 6: Ausgangsmatrix in Excel eintragen



	I	J	K	L	M	N
15						
16						
17		Ausgangsmatrix				
18						
19		x	y	z		
20		3	2	1	1	
21		5	3	4	2	
22		1	1	-1	1	
23						
24						
25						
26		x=	=MMULT(MINV(J20:L22);M20:M22)			
27		y=				
28		z=				

Abbildung 7: Folgende Befehlsreinfolge verwenden, um die o. g. Gleichung berechen zu lassen. MMULT(...;...) ...Matrizenmultiplikation. MINV(...)... Inverses der Matrix bilden



	I	J	K	L	M
15					
16					
17		Ausgangsmatrix			
18					
19		x	y	z	
20		3	2	1	1
21		5	3	4	2
22		1	1	-1	1
23					
24					
25					
26		x=	-4		
27		y=	6		
28		z=	1		

Abbildung 8: Ergebnis mit Enter-Taste ausgeben lassen

7. Quellen

Klinikum, U. H. (2022, Juni 3). *CT Schädel Gehirn*. https://www.klinikum.uni-heidelberg.de/fileadmin/radiologie/radiodiagnostik/Fallsammlungen/images/normalbefunde/ctskull/cts9.jpg

Obach, C. (2006). Blick in den Kopf—Computertomographie—Ein problemorientierter Zugang zu linearen Gleichungssystemen. *mathematik lehren*, *Mit Tabellen kalkulieren*(137), 52–55.

Widmer, A. (o. J.). *Roentgenbild-schaedel*. Röntgen Service. Abgerufen 5. Juni 2022, von http://www.roentgen-service.ch/wp-content/uploads/2015/10/roentgenbild-schaedel.jpg