

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

3. Übung: Differentialrechnung in mehreren Variablen (Lösungen)

Aufgabe 1

Ermitteln Sie jeweils sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(a) $f(x, y) = 4 + x^3 + 3x^2y^3 + y^3$, (b) $f(x, y) = x \sin(2x + y)$, (c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$,
(d) $f(x, y) = x^y$, (e) $f(x, y) = xe^{y/x}$, (f) $f(x, y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x \ln y$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4 + x^3 + 3x^2y^3 + y^3 \\ f_x(x, y) &= 3x^2 + 6xy^3, \quad f_y(x, y) = 9x^2y^2 + 3y^2 \\ f_{xx}(x, y) &= 6x + 6y^3, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 18xy^2, \quad f_{yy}(x, y) = 18x^2y + 6y \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \sin(2x + y) \\ f_x(x, y) &= \sin(2x + y) + 2x \cos(2x + y), \quad f_y(x, y) = x \cos(2x + y) \\ f_{xx}(x, y) &= 4 \cos(2x + y) - 4x \sin(2x + y), \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \cos(2x + y) - 2x \sin(2x + y), \\ f_{yy}(x, y) &= -x \sin(2x + y) \end{aligned}$$

(c) Voraussetzung: $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \arctan \frac{y}{x}, \quad [(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}] \\ f_x(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

(d) Voraussetzung: $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^y \\ f_x(x, y) &= yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = \ln x \cdot x^y \\ f_{xx}(x, y) &= y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1}, \quad f_{yy}(x, y) = (\ln x)^2 x^y \end{aligned}$$

(e) Voraussetzung: $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^{\frac{y}{x}} \\ f_x(x, y) &= e^{\frac{y}{x}}(1 - y/x), \quad f_y(x, y) = e^{\frac{y}{x}} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{y^2}{x^3} e^{\frac{y}{x}}, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

(f) Voraussetzung: $y > 0$

$$f(x, y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x \ln y$$

$$f_x(x, y) = 2x + e^x y + 2e^y x - 3 \ln y \quad f_y(x, y) = e^x + e^y x^2 - \frac{3x}{y}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 + e^x y + 2e^y, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^x + 2e^y x - \frac{3}{y}, \quad f_{yy}(x, y) = e^y x^2 + \frac{3x}{y^2}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.

- (a) Zeichnen Sie eine Karte (Höhenlinienbild) der Funktion.
- (b) Vergewissern Sie sich, dass der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^\top$ auf dem Graphen von f liegt.
- (c) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ den Gradienten und die Gleichung der Tangentialebene.
- (d) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ die Ableitung in Richtung $\mathbf{a} = (1, 0)^\top$. In welcher Richtung besitzt die Tangentialebene den steilsten Anstieg, und wie kann man diesen berechnen?
- (e) Finden Sie einen Richtungsvektor, dessen Richtungsableitung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ genau $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ist.

Lösung:

- (a) Für die Höhenlinien ergeben sich die Gleichungen

$$f(x, y) = c^2 = 2x^2 + y^2 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Konstante für die Höhenlinien kann als c^2 gewählt werden, da $f(x, y) \geq 0$ gilt. Die Gleichung bedeutet, dass es sich bei den Höhenlinien um Ellipsen um den Ursprung mit Halbachsen $c/\sqrt{2}$ und c handelt.

- (b) Es gilt

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

- (c) Allgemein gilt für den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = (4x, 2y)^\top.$$

Damit ergibt sich also der gesuchte Gradient zu $(2, 1)^\top$. Die Gleichung der Tangentialebene lautet

$$\begin{aligned} t(x, y) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} + (2 \ 1) \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= 2x + y - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(d) Für die Richtungsableitung gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a}(x, y) &= \nabla f(x, y)^\top a \\ \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= (2, 1)(1, 0)^\top = 2\end{aligned}$$

Die Richtung des steilsten Anstieges ist der Gradient selbst, also in diesem Fall $(2, 1)^\top$. Damit man den Anstieg berechnen kann, muss man den Gradienten noch normieren. In diesem Fall hat der Gradient die Norm $\sqrt{5}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^\top \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{a}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= (2, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^\top = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{\nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|} \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{a}}(x, y) &= \frac{(\nabla f(x, y))^\top \nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|} = \frac{\|\nabla f(x, y)\|^2}{\|\nabla f(x, y)\|} = \|\nabla f(x, y)\|.\end{aligned}$$

(e) Der gesuchte Richtungsvektor sei $a = (x, y)^\top$, dann muss gelten

$$\begin{aligned}\|a\|^2 &= 1 = x^2 + y^2 \\ \nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top a &= 2x + y = \frac{3}{2}\sqrt{2}. \\ \Rightarrow y &= \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2x \\ \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2x\right)^2 &= 5x^2 - 6\sqrt{2}x + \frac{9}{2} = 1\end{aligned}$$

Die letzte quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{2}/2$ und $x_2 = 7\sqrt{2}/10$. Für diese beiden x -Komponenten ergeben sich dann die Richtungsvektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}\sqrt{2} \\ \frac{1}{10}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 4|y - 2z|.$$

- (a) Für welche Richtungen $n \in \mathbb{R}^3$ besitzt f in $(0, 0, 0)^\top$ eine Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial n}(0, 0, 0)$?
- (b) Was können Sie daraus bzgl. der partiellen und totalen Differenzierbarkeit von f in $(0, 0, 0)^\top$ schlussfolgern?
- (c) Was ändert sich bzgl. der Differenzierbarkeit in $(0, 0, 0)^\top$, wenn wir die Funktion leicht abändern zu

$$g(x, y, z) = 3x^2 \cdot |y - 2z|?$$

Lösung:

(a) Es sei $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ mit $\|\mathbf{n}\| = 1$. Dann gilt für die Richtungsableitung nach \mathbf{n} in $(0, 0, 0)^\top$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(0, 0, 0) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hn_1, 0 + hn_2, 0 + hn_3) - f(0, 0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 \cdot (0 + hn_1)^2 + 4|(0 + hn_2) - 2 \cdot (0 + hn_3)|) - (3 \cdot 0^2 + 4|0 - 2 \cdot 0|)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2n_1^2 + 4|h||n_2 - 2n_3|}{h} = 0 + 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h||n_2 - 2n_3|}{h}\end{aligned}$$

Aus Mathematik 2 wissen wir, dass der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ nicht existiert (links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein). Folglich existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(0, 0, 0)$ nur für $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$n_2 - 2n_3 = 0.$$

(Dies gilt übrigens in jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 - 2x_3 = 0$).

(b) Die Funktion f kann in $(0, 0, 0)^\top$ nicht (total) differenzierbar sein, denn dies würde die Existenz aller Richtungsableitungen implizieren.

Weiterhin überprüft man schnell für die drei Koordinatenrichtungen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, die Bedingung $n_2 = 2n_3$ und erhält, dass lediglich die partielle Ableitung in \mathbf{e}_1 , also x -Richtung, existiert.

(Dies gilt übrigens in jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 - 2x_3 = 0$).

(c) Für g erhalten wir in $(0, 0, 0)$ sehr schnell

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2n_1^2 \cdot |h||n_2 - 2n_3|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3hn_1^2 \cdot |h||n_2 - 2n_3| = 0.$$

Zur Erinnerung: g ist in \mathbf{x}_0 total differenzierbar, wenn

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \nabla g(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \phi(\mathbf{x}),$$

wobei $\frac{|\phi(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Wir zeigen, dass g an der Stelle $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ total differenzierbar ist. Hier sind $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $g(\mathbf{0}) = \nabla g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Folglich ist $\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$.

Wir schreiben $\mathbf{x} = h\mathbf{n}$ mit $\|\mathbf{n}\| = 1$ und $h = \|\mathbf{x}\|$.

Es gilt

$$\frac{|\phi(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{|g(h\mathbf{n})|}{h} = \frac{1}{h} 3h^2 \underbrace{n_1^2}_{\leq 1} \cdot |h| \underbrace{|n_2 - 2n_3|}_{\leq 3} \leq 9h^2.$$

Diese Abschätzung gilt unabhängig von \mathbf{n} . Folglich ist $\frac{|\phi(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

(a) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$

(b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^\alpha$ für $\alpha > 0$

(c) $f(\mathbf{x}) = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$

mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und einem festen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} &= 2(x_i - a_i) \\ \Rightarrow \nabla f &= 2(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

b) Die folgenden Funktionen sind immer skalare Funktionen von $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$, z.B.

$$f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)^{\frac{\alpha}{2}} = g(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2), \text{ mit } g(t) = t^{\frac{\alpha}{2}}$$

Die äußere Funktion g hängt nur von einem Skalar ab und kann ganz normal abgeleitet werden. Mit der Kettenregel und $g'(t) = \frac{\alpha}{2} t^{\frac{\alpha}{2}-1}$ folgt

$$\nabla f = \underbrace{\frac{\alpha}{2} (\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2(\mathbf{x} - \mathbf{a})}_{\text{innere Abl.}} = \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{\alpha-2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Insbesondere ergibt sich für $\alpha = 1$ und $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\nabla \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}$$

c) $f(\mathbf{x}) = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \frac{1}{2} \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)$

$$\nabla f = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2(\mathbf{x} - \mathbf{a})}_{\text{innere}} = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Aufgabe 5

Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl c . Zeigen Sie dass

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, t) := f(x + ct) + g(x - ct)$$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) &= f'(x + ct) + g'(x - ct), \\ \frac{\partial}{\partial x^2}u(x, t) &= f''(x + ct) + g''(x - ct), \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= f'(x + ct) \cdot c + g'(x - ct) \cdot (-c) \\ &= c(f'(x + ct) - g'(x - ct)), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) &= c(f''(x + ct) \cdot c - g''(x - ct) \cdot (-c)) \\ &= c^2(f''(x + ct) + g''(x - ct)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t).\end{aligned}$$