TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 20. November 2023
Prof. Dr. Fleurianne Bertrand
C. Bombach, T.-C. Riemer, Dr. M. Winkler

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

4. Übung: Totales Differential und vektorwertige Funktionen (Lösungen)

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen das totale Differential:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, (b) $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$.

Lösung:

Totales Differential $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

a) $d\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy$

b) $d\left(xe^{x^2+y^2+z^2}\right) = (2x^2+1)e^{x^2+y^2+z^2}dx + 2xye^{x^2+y^2+z^2}dy + 2xze^{x^2+y^2+z^2}dz$

Aufgabe 2

In einem Experiment wird aus einer Messung von Spannung U und Stromstärke I ein Widerstand mit dem Ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ berechnet. Wie hängt der relative Fehler des Widerstands mit den relativen Fehlern von Spannung und Stromstärke zusammen?

Lösung:

Für das totale Differential von $R = U/I$ gilt:

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\partial R}{\partial U}dU + \frac{\partial R}{\partial I}dI = \left(\frac{1}{I}\right)dU + \left(-\frac{U}{I^2}\right)dI \\ &= \left(\frac{R}{U}\right)dU - \left(\frac{R}{I}\right)dI. \end{aligned}$$

Dies ergibt für den relativen Fehler:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I} \Rightarrow \left|\frac{dR}{R}\right| \leq \left|\frac{dU}{U}\right| + \left|\frac{dI}{I}\right|.$$

Dieses Ergebniss hätte man auch direkt aus der Vorlesung erhalten. Dort wurden relative Fehler für Funktionen der Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ hergeleitet.

Aufgabe 3

Gegeben sei die *Cobb-Douglas Produktionsfunktion*

$$y(p_1, p_2) = 9p_1^{2/3}p_2^{1/3}.$$

Schätzen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die Änderung des Produktionswertes, wenn man $p_1 = 27$ um eine Einheit verringert und $p_2 = 8$ um zwei Einheiten vergrößert, nach oben ab. Vergleichen Sie den Wert mit dem exakten Änderungswert.

Lösung:

Wir erhalten als partielle Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial p_1}(p_1, p_2) = 6p_1^{-1/3}p_2^{1/3}, \qquad \frac{\partial y}{\partial p_2}(p_1, p_2) = 3p_1^{2/3}p_2^{-2/3},$$

und als totales Differential in $(p_1, p_2) = (27, 8)$ folglich

$$dy(27, 8) = \frac{6\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}dp_1 + \frac{3(\sqrt[3]{27})^2}{(\sqrt[3]{8})^2}dp_2 = 4dp_1 + \frac{27}{4}dp_2.$$

Damit ergibt sich als approximative Änderung von y

$$|\Delta y| \leq 4|\Delta p_1| + \frac{27}{4}|\Delta p_2| = 4 \cdot 1 + \frac{27}{4} \cdot 2 = \frac{35}{2} = 17.5$$

Die tatsächliche Änderung ist

$$|\Delta y| = |y(27, 8) - y(26, 10)| \approx |162 - 170.1733| = 8.1733.$$

Aufgabe 4

Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit $r_1 = (30 \pm 1)\, mm, \quad r_2 = (60 \pm 1)\, mm$ sowie die Höhe mit $h = (50 \pm 0,2)\, mm$ gemessen.
Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des Kegelstumpfvolumens nach der Formel

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Lösung:

Für das Volumen erhalten wir $V = 105000\pi\ mm^3$.
Das totale Differential von V ist

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r_1}dr_1 + \frac{\partial V}{\partial r_2}dr_2 + \frac{\partial V}{\partial d}dh.$$

Die Abweichungen sind $dr_1 = \pm 1\ mm$, $dr_2 = \pm 1\ mm$ und $dh = \pm 0.2\ mm$. Die partiellen Ableitungen für $r_1 = 30\ mm, r_2 = 60\ mm, h = 50\ mm$ sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r_1} &= \frac{\pi h}{3}(2r_1 + r_2) &&= 2000\pi\ mm^2 \\
\frac{\partial V}{\partial r_2} &= \frac{\pi h}{3}(r_1 + 2r_2) &&= 2500\pi\ mm^2 \\
\frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) &&= 2100\pi\ mm^2
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die totale Abweichung abschätzen:

$$\begin{aligned}
dV &= \pm 2000\pi\ mm^3 \pm 2500\pi\ mm^3 \pm 420\pi\ mm^3 \\
|dV| &\leq +2000\pi\ mm^3 + 2500\pi\ mm^3 + 420\pi\ mm^3 = 4920\pi\ mm^3
\end{aligned}$$

Das ergibt insgesamt (mit dem absoluten Fehler) $V = (105000 \pm 4920)\pi\ mm^3$.
Der relative Fehler ist dann $\frac{4920\pi\ mm^3}{105000\pi\ mm^3} \approx 4.7\ \%$.

Aufgabe 5

Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines geraden Kreiszylinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit $0,5\,\%$ und die Höhe mit $1\,\%$ fehlerhaft gemessen werden?

Lösung:

Wir setzen für den Radius $r = r_0 \pm dr = r_0 \pm \frac{1}{200} r_0$. Analog für die Höhe $h = h_0 \pm dh = h_0 \pm \frac{1}{100} h_0$.
Das Volumen ergibt sich dann mit $V = \pi r^2 h = \pi r_0^2 h_0$.
Das totale Differential ist

$$\begin{aligned} dV &= (\pi 2rh)dr + (\pi r^2)dh \\ &= (\pi 2 r_0 h_0)\frac{1}{200} r_0 + (\pi r_0^2)\frac{1}{100} h_0 \\ &= \pi r_0^2 h_0 (\frac{2}{200} + \frac{1}{100}) = \pi r_0^2 h_0 \frac{2}{100}. \end{aligned}$$

Das heißt, dass der relative Fehler ist $\frac{dV}{V} = \frac{\pi r_0^2 h_0 \frac{2}{100}}{\pi r_0^2 h_0} = 2\%$.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitungen (Jacobi-Matrizen) folgender Funktionen:

(a) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ ze^{3xy} \end{bmatrix}$,

(b) $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x \sin y \\ y \sin x \\ \sin x \cos y \end{bmatrix}$,

(c) $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{h}(r,\phi) = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$,

(d) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$.

Haben Sie eine Vorstellung, was die Funktion γ in (d) beschreibt?

Lösung:

$$f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 3yze^{3xy} & 3xze^{3xy} & e^{3xy} \end{bmatrix} \quad g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sin y & x \cos y \\ y \cos x & \sin x \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{bmatrix}$$

$$h'(r,\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{bmatrix} \quad \gamma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7

Gegeben seien

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ t^3 \end{bmatrix}, \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Komposition $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung:

$$f'(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \sin x_2 & x_1^2 \cos x_2 \end{bmatrix} \quad g'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) &= f'(g(t)) \cdot g'(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \sin(t^3) & \cos^2 t \cos(t^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \sin t \cos t \sin(t^3) + 3t^2 \cos^2 t \cos(t^3)\end{aligned}$$

Diese Ableitung hätte auch dadurch berechnet werden können, indem man zuerst $f \circ g = \cos^2 t \sin(t^3)$ berechnet und dann ableitet.

Aufgabe 8

Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ definiert. Schränkt man die Werte von x und y auf

$$(x,y) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

ein, erhält man eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ mit Hilfe der Kettenregel. An welchen Stellen verläuft die Kurve horizontal, d.h. parallel zur x-y-Ebene?

Lösung:

Wir erhalten

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2},$$

sowie $\frac{dx}{dt}(t) = \exp(t)$ und $\frac{dy}{dt}(t) = -\exp(-t)$. Mit Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \left[\frac{\partial z}{\partial x}(\exp(t), \exp(-t)),\ \frac{\partial z}{\partial y}(\exp(t), \exp(-t))\right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\exp(-2t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2},\ \frac{\exp(2t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\right] \begin{bmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\exp(-2t+t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2} - \frac{\exp(2t-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2} \\ &= \frac{\exp(-t) - \exp(t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}.\end{aligned}$$

Als Probe bietet sich das Differenzieren von $z(t) = \frac{\exp(t)\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-t)} = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}$ an.

Wenn die Kurve horizontal verlaufen soll, dass muss gelten, dass $\frac{dz}{dt} = 0$, ergo

$$0 = \frac{dz}{dt} = \frac{\exp(-t) - \exp(t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2} \quad\Longleftrightarrow\quad 0 = \exp(-t) - \exp(t) \quad\Longleftrightarrow\quad \exp(t) = \exp(-t),$$

also $t = 0$, was auf den Punkt $(1, 1, 0.5)$ führt.