Hausaufgabe Nr.15

Dennis P. Kliem, Mtk-Nr.: 56856

11.1.2022

Aufgabe 24

Angenommen, man hat die Funktion $p(z) = (z+1)(z-2i+1)(z+2i) = z^3+2z^2+(5+2i)z+4+2i, p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Nullstellen $z_1 = -1$, $z_2 = -1+2i$ und $z_3 = -2i$, welche sich aus der faktorisierten Schreibweise der Funktion ergeben. Wenn alle komplexen Nullstellen konjugiert komplex auftreten würden, müsste gelten:

$$p(\overline{z_1}) = p(-1) = 0 \tag{1}$$
$$p(\overline{z_2}) = p(-1-2i) = 0 \tag{2}$$
$$p(\overline{z_3}) = p(2i) = 0 \tag{3}$$

Dies ist nicht immer wahr, wie ich anhand des Beispiels $p(\overline{z_3})$ zeigen werde:

$$\begin{aligned} p(\overline{z_3}) &= p(2i) \\ &= z^3 + 2z^2 + (5+2i)z + 4 + 2i \\ &= (2i)^3 + 2\cdot(2i)^2 + (5+2i)\cdot(2i) + 4 + 2i \\ &= 8i - 8 - 4 + 10i + 4 + 2i \\ &= -8 + 20i \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{QED}$.

Somit ist die Annahme, dass alle komplexen Nullstellen eines Polynoms konjugiert vorliegen würden, falsch.

Aufgabe 25

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum V ist eine algebraische Struktur, deren Elemente Vektoren heißen. Er ist da immer über einem Körper K, wie zum Beispiel den Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder den

Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, definiert, welcher Addition und Multiplikation ermöglicht. Wenn gilt:

$$\oplus : V \times V \to V \tag{4}$$
$$\odot : K \times V \to V \tag{5}$$

Eine Struktur $(V, \oplus, \odot)$ nennt man dann einen K-Vektorraum.

Aufgabe 26

$\mathbb{R}^2$ ist mit den üblichen Definitionen von Skalarmultiplikation und Vektoraddition kein Vektorraum über $\mathbb{C}$, da $i \notin \mathbb{R}$ ist. Da jedoch $\mathbb{C}$ die Skalarmultiplikation und Addition mit imaginären Zahlen zulässt, welche nicht auf $\mathbb{R}$ abgebildet werden kann, ist $\mathbb{R}^2$ kein Vektorraum über $\mathbb{C}$.