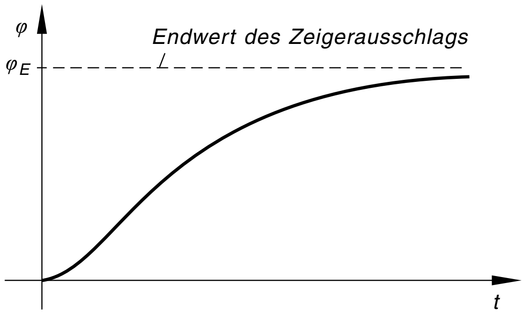

Bild IX-37

Anmerkung: Die Lösung lässt sich damit auch in der folgenden Form darstellen:

$$\varphi(t) = \varphi_E \left[1 - \frac{\mu + \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta + \mu)t} - \frac{\mu - \delta}{2\mu} \cdot e^{(-\delta - \mu)t} \right] =$$

$$= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\frac{\mu + \delta}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\mu - \delta}{2} \cdot e^{-\mu t} \right) \right] =$$

$$= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\frac{\mu}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\delta}{2} \cdot e^{\mu t} + \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu t} - \frac{\delta}{2} \cdot e^{-\mu t} \right) \right] =$$

$$= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\mu \cdot \underbrace{\frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2}}_{\cosh(\mu t)} + \delta \cdot \underbrace{\frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2}}_{\sinh(\mu t)} \right) \right] =$$

$$= \frac{\varphi_E}{\mu} \left[\mu - e^{-\delta t} \left(\mu \cdot \cosh(\mu t) + \delta \cdot \sinh(\mu t) \right) \right]$$

Beispiel 16: Erzwungene mechanische Schwingung

Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (erzwungene Schwingung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)

Ein *schwach gedämpftes schwingungsfähiges mechanisches System* mit dem Dämpfungsfaktor δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0 (des *ungedämpften* Systems) wird von *außen* durch eine *periodische* Kraft mit derselben Kreisfrequenz ω_0 zu *erzwungenen* Schwingungen angeregt. *Lösen* Sie die *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot \cos(\omega_0 t) \qquad (\text{mit } \delta < \omega_0)$$

für die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$x = x(t)$: Auslenkung des Systems zur Zeit t; $F = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$: periodische äußere Kraft mit $F_0 > 0$; m: Schwingungsmasse; $a = F_0/m$

Lehrbuch: Bd. 2, IV.3.4 und IV.4.1.4

Lösung:

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

durch den *Lösungsansatz* (*Exponentialansatz*) $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und erhalten die Gleichung

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\delta\lambda \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ führt schließlich zu der *charakteristischen* Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Diese besitzt bei der vorausgesetzten *schwachen* Dämpfung $(\delta < \omega_0)$ *konjugiert komplexe* Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\underbrace{\delta^2 - \omega_0^2}_{<\,0}} = -\delta \pm \sqrt{-(\underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\omega_d^2\,>\,0})} = -\delta \pm \sqrt{-\omega_d^2} = -\delta \pm j\,\omega_d$$

Wir erhalten somit eine *gedämpfte* Schwingung mit der Gleichung

$$x_0(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right] \qquad \text{mit} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.4.1.3.1). Eine *partikuläre* Lösung x_p dor *inhomogenen* Schwingungsgleichung findet man mit dem *Lösungsansatz*

$$x_p = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

(siehe Band 2, Abschnitt IV.3.4, Tabelle 2; Störfunktion: $g(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$).
Mit diesem Ansatz und den zugehörigen Ableitungen

$$\dot{x}_p = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein:

$$-\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta\left[\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)\right] +$$

$$+ \omega_0^2\left[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)\right] = a \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow$$

$$-\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\delta\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) +$$

$$+ \omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Diese Gleichung reduziert sich wie folgt:

$$2\,\delta\,\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\,\delta\,\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + 0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Auf der *rechten* Seite haben wir dabei den *verschwindenden Sinusterm* $0 \cdot \sin(\omega_0 t)$ addiert. Durch *Koeffizientenvergleich* der Kosinus- bzw. Sinusterme beiderseits lassen sich dann die gesuchten Koeffizienten A und B bestimmen:

$$2\,\delta\,\omega_0 A = a \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \qquad \text{und} \qquad -2\,\delta\,\omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Somit lautet die *partikuläre* Lösung

$$x_p = \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Schwingungsgleichung ist dann die Summe aus x_0 und x_p:

$$x(t) = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-\delta t}\,[C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 berechnen wir aus den *Anfangsbedingungen* $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ wie folgt:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1\,[C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + C_2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Zwischenergebnis: $x(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \dfrac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$

Die benötigte Ableitung $\dot{x}(t)$ erhalten wir mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\dot{x}(t) = C_1\,[\mathrm{e}^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \cdot \omega_d \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}] + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0 =$$

$$= C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}\,[-\delta \cdot \sin(\omega_d t) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\,\delta} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot 1\,[-\delta \cdot \sin 0 + \omega_d \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\,\delta} \cdot \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1\,[-\delta \cdot 0 + \omega_d \cdot 1] + \frac{a}{2\,\delta} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1\,\omega_d + \frac{a}{2\,\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{a}{2\,\delta\,\omega_d}$$

Die *erzwungene* Schwingung wird somit durch die Gleichung

$$x(t) = -\frac{a}{2\,\delta\,\omega_d} \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{a}{2\,\delta}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d}\right], \qquad t \geq 0$$

beschrieben.

Sie besitzt den in Bild IX-38 dargestellten Verlauf.

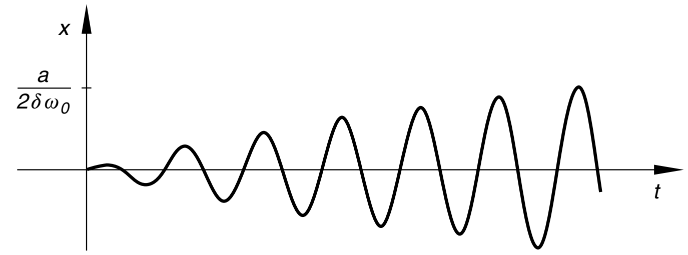

Bild IX-38

Im Laufe der Zeit *stabilisiert* sich diese Schwingung, da der zweite Term *exponentiell gegen null abklingt*, zu einer reinen *Sinusschwingung* mit der *Kreisfrequenz* ω_0 und der *Schwingungsamplitude* $A = \dfrac{a}{2\,\delta\,\omega_0}$ (siehe Bild IX-39):

$$x(t) \approx \frac{a}{2\,\delta}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - 0\right] = \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t) \qquad (t \gg 1/\delta)$$

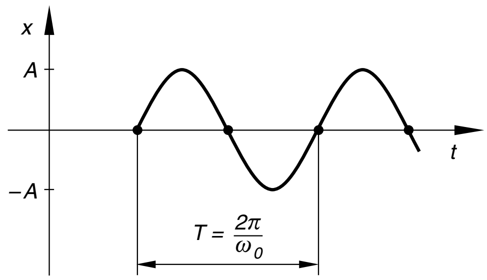

Bild IX-39

Beispiel 17:	**Gleichung einer Seilkurve (Kettenlinie)**
	Nichtlineare Dgl 2. Ordnung (Substitutionsmethode, Trennung der Variablen)

Die Kurvengleichung $y = y(x)$ eines an zwei Punkten A und B befestigten freihängenden *Seiles*, das ausschließlich durch sein *Eigengewicht* belastet wird, genügt der *nichtlinearen* Dgl 2. Ordnung

$$y'' = \frac{q}{F_H}\cdot\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{1 + (y')^2}$$

q: Eigengewicht des Seils pro Längeneinheit

F_H: Konstante Horizontalkomponente der Seilkraft

$k = F_H/q$

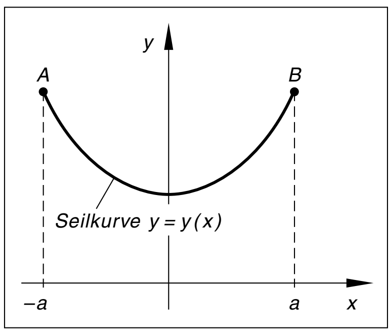

Bild IX-40