

Mathematik III (für IF, ET, Ph)
Wintersemester 2023/24

6. Übung: Integralrechnung im Mehrdimensionalen

Aufgabe 1

Eine Flugzeughangar hat eine rechteckige Grundfläche $D := [0, 6] \times [0, 3]$ und seine Dachform kann durch die Funktion

$$f(x, y) = y(x - 3)^2 + \exp(x - y), \quad (x, y) \in D,$$

beschrieben werden. Berechnen Sie das Volumen des Hangars.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie den Normalbereich

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}.$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_G xy(1 - x) \, dx \, dy.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt des homogenen Körpers, der durch die Flächen

$$z + x + y = a \quad (a > 0), \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$$

begrenzt wird.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_G (x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus [0, 1]^2.$$

Verwenden Sie dabei auch Polarkoordinaten.

Aufgabe 5

Gegeben ist eine Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

Berechnen Sie die Fläche der Ellipse sowie das Integral

$$\int_E xy^2 \, dx \, dy.$$

Hinweis: Führen Sie dazu das Integral über E durch eine Transformation auf ein Integral auf dem Einheitskreis zurück und nutzen Sie anschließend Polarkoordinaten.