2. Hausaufgabe Lineare Algebra I

Jakob Lorenz - Matrikel-Nr.: 740654

11.11.2022

Aufgabe 7

Dieser 'Beweis' ist falsch, da unter anderem in der Induktionsbehauptung die Menge nur bis P_{n_0} geht, aber eigentlich bis P_{n_0+1} gehen sollte und im 'Induktionsbeweis' eine Aussage über P_{n_0+1} aus der Induktionsvoraussetzung gezaubert wird, wobei in der Induktionsvoraussetzung keine Aussage über P_{n_0+1} getroffen wird.

Aufgabe 8

IA: $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1$ w.A.

IS: $n \to n+1$

IB: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2)(2n+3)$

Beweis:
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2)(2n+3) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} K^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2)(2n+3)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2)(2n+3)$
$\Leftrightarrow n(2n+1) + 6(n+1) = (n+2)(2n+3)$
$\Leftrightarrow 2n^2 + 7n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$
$\Leftrightarrow 0 = 0$

q.e.d.

Aufgabe 9

a)

These: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

IA: $\sum\limits_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2 = 1$ w.A.

IS: $n \to n+1$

IB: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

Beweis:
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) + (2n+1) = (n+1)^2$
$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1^2$
$\Leftrightarrow 0 = 0$

q.e.d.

b)

These: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

IA: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = \frac{4}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 1 = 1$ w.A.

IS: $n \to n+1$

IB: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1)$

Beweis:
$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1)$
$\Leftrightarrow \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + (2n+1)^2 = \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1)$
$\Leftrightarrow \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 4n^2 + 4n + 1 = \frac{4}{3}(n^3 + 1^3 + 3n^2 + 3n) - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}n^3 + \frac{4}{3} + 4n^2 + 4n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow 0 = 0$

q.e.d.

Aufgabe 10

Ich betrachte eine Menge $M_n = \{n_1, ..., n_n\}, n \in \mathbb{N}$

IA: Die einelementige Menge $M_1 = \{n_1\}, n_1 \in \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element n_1.

IS: $n \to n+1$

IB: Die Menge $M_{n+1} = \{n_1, ..., n_{n+1}\}, n \in \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis:
$M_{n+1} = M_n \cup \{n_{n+1}\}$ Von M_n wissen wir bereits, dass die Menge ein kleinstes Element besitzt und da $\{n_{n+1}\}$ eine einelementige Menge ist besitzt diese auch ein kleinstes Element n_{n+1}. Somit haben beide Mengen ein jeweils kleinstes Element und nach der Vereinigung der beiden Mengen müssen nur noch diese 2 kleinsten Elemente verglichen werden, um das kleinste Element zu ermitteln.
Folglich hat M_{n+1} auch ein kleinstes Element.

q.e.d.

Aufgabe 11

IA: Für Dreiecke gilt die Aussage der Aufgabenstellung.

IS: $n \to n+1$

IB: Die Aussage gilt auch für konvexe $(n+1)$-ecke

Beweis:
Von einem konvexen n-eck kann man auf ein konvexes $(n+1)$-eck schließen, indem man einen Eckpunkt hinzufügt und ein Seite des konvexen n-eck 'aufbricht', so dass ein konvexes $(n+1)$-eck entsteht. Wenn man jetzt die 'aufgebrochene' Seite wieder schließt hat man das konvexe $(n+1)$-eck in ein Dreieck und ein konvexes n-eck geteilt, von dem wir wissen, das es sich in Dreiecke zerteilen lässt.
Daher kann auch ein konvexe $(n+1)$-eck durch das einzeichnen von Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden.

q.e.d.

Bei einem konvexen n-eck würden dann $n-3$ Diagonalen entstehen.

IA: Bei einem Dreieck entstehen $3-3=0$ Diagonalen. w.A.

IS: $n \to n+1$

IB: Bei einem konvexen $n+1$-eck entstehen dann $((n+1)-3)$ Diagonalen.

Beweis:
Ein $n+1$-eck kann man wie oben beschrieben durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein n-eck teilen. Eine Diagonale wurde schon eingezeichnet und für ein n-eck werden $n-3$ Diagonalen benötigt. Daraus folgt, dass $(n-3)+1 = (n+1)-3 \Leftrightarrow n-2 = n-2$, was eine wahre Aussage ist.

q.e.d.

Analog kann diese Beweis auch für die Anzahle der entstehenden Dreiecke führen:
Bei einem konvexen n-eck würden durch die Zerlegung $n-2$ Dreiecke entstehen.

IA: Bei einem Dreieck entsteht $3-2=1$ Dreieck. w.A.

IS: $n \rightarrow n+1$

IB: Bei einem konvexen $n+1$-eck entstehen dann $((n+1)-2)$ Dreiecke.

Beweis:
Ein $n+1$-eck kann man wie oben beschrieben durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein n-eck teilen. Ein Dreieck ist bereits entstanden und das n-eck kann man in $n-2$ Dreiecke zerlegen.
Daraus folgt, dass $(n-2)+1=(n+1)-2 \Leftrightarrow n-1=n-1$, was eine wahre Aussage ist.

q.e.d.

Summe der Innenwinkel für ein konvexes n-eck: $(n-2) \cdot 180°$

IA: Für ein Dreieck: $(3-2) \cdot 180° = 180°$ w.A.

IS: $n \rightarrow n+1$

IB: Für die Summer der Innenwinkel in einem konvexen $n+1$-eck gilt $((n+1)-2) \cdot 180°$

Beweis:
Wie oben kann man das konvexe $n+1$-eck in ein Dreieck und ein n-eck teilen.
Daraus folgt dann: $((n+1)-2) \cdot 180° = (n-2) \cdot 180° + 180° \Leftrightarrow (n-1) \cdot 180° = (n-1) \cdot 180°$ w.A.