

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)
Sommersemester 2025

10. Übung: Stetige Verteilungen - Normalverteilung

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $\mathbf{P}(|X| < 1.5)$, $\mathbf{P}(X > 2)$, $\mathbf{P}(X > -1)$, wenn $X \sim N(0, 1)$.
b) $\mathbf{P}(-2 \leq X < 7)$, $\mathbf{P}(-5 \leq X \leq -2)$, $\mathbf{P}(X > 0)$, wenn $X \sim N(1, 9)$.
c) σ^2 , wenn $X \sim N(2, \sigma^2)$ mit $\mathbf{P}(0 < X < 4) = 0.68269$.
d) μ , wenn $X \sim N(\mu, 16)$ mit $\mathbf{P}(X < 7) = 0.3265$.

Lösung:

- a) Da wir zur Dichte der Normalverteilung keine Stammfunktion finden, müssen wir die Werte aus der Tabelle zur Standardnormalverteilung ablesen. Hierbei bezeichnen wir mit $\Phi(t) = F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Wegen Symmetriegründen gilt $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$. Weiter folgt $\mathbf{P}(X = t) = 0$, dass $\mathbf{P}(X \leq t) = \mathbf{P}(X < t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Somit erhalten wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X| < 1.5) &= \mathbf{P}(-1.5 < X < 1.5) = \mathbf{P}(X < 1.5) - \mathbf{P}(X < -1.5) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 2\Phi(1.5) - 1 \approx 2 \cdot 0.93319 - 1 \approx 0.86638,\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X > 2) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.97725 \approx 0.02275$$

sowie

$$\mathbf{P}(X > -1) = 1 - \mathbf{P}(X \leq -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.84134.$$

- b) Mit der Transformation

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 1}{3} =: Z$$

erhalten wir wieder eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Damit folgt analog

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(-2 \leq X < 7) &= \mathbf{P}\left(\frac{-2-1}{3} \leq Z < \frac{7-1}{3}\right) = \mathbf{P}(-1 \leq Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.97725 + 0.84134 - 1 \approx 0.81859,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(-5 \leq X \leq -2) &= \mathbf{P}(-2 \leq Z \leq -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) \\ &\approx 0.97725 - 0.84134 \approx 0.13591,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 0) &= \mathbf{P}\left(Z > -\frac{1}{3}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z \leq -\frac{1}{3}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.62930.\end{aligned}$$

- c) Wir betrachten wieder die Transformation auf eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z := \frac{X-2}{\sigma}$. Dann gilt für die gegebene Wahrscheinlichkeit, dass

$$\mathbf{P}(0 < X < 4) = \mathbf{P}\left(-\frac{2}{\sigma} < Z < \frac{2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 0.68269,$$

was äquivalent ist zu $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) \approx 0.841345$. Daraus folgt $\frac{2}{\sigma} = 1$, woraus wir $\sigma = 2$ erhalten.

- d) Wir wissen, dass $X \sim N(\mu, 16)$ gilt. Somit ist $\sigma = \sqrt{16} = 4$ und $Z = \frac{X-\mu}{4} \sim N(0, 1)$. Analog erhalten wir aus

$$\mathbf{P}(X < 7) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{7-\mu}{4}\right) = \Phi\left(\frac{7-\mu}{4}\right) \stackrel{!}{=} 0.3265,$$

dass $\Phi\left(\frac{\mu-7}{4}\right) = 0.6735$, was äquivalent ist zu $\frac{\mu-7}{4} \approx 0.45$, woraus $\mu = 8.8$ folgt.

Aufgabe 2

Erfahrungsgemäß ist die Größe der aus einer bestimmten Produktion stammenden Widerstände eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 990\Omega$ und $\sigma = 20\Omega$. Alle Widerstände, die nicht in den Toleranzgrenzen von 950Ω bis 1050Ω liegen, sind als Ausschuss anzusehen.

- Wieviel % der gefertigten Widerstände sind Ausschuss?
- Durch Änderung der Technologie gelang es, den Mittelwert auf 1000Ω zu erhöhen. Welcher Nutzen entsteht?
- Für den Einbau in Präzisionsgeräte sind Widerstände von 990Ω bis 1010Ω erforderlich. Wie groß darf σ maximal sein ($\mu = 1000$), wenn 90% der Widerstände die Bedingungen zum Einbau erfüllen sollen?

Lösung:

- a) Mit der standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z := \frac{X-990}{20}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > 1050 \vee X < 950) &= 1 - \mathbf{P}(950 \leq X \leq 1050) = 1 - \mathbf{P}(-2 \leq Z \leq 3) \\ &= 1 - \Phi(3) + \Phi(-2) = 2 - \Phi(3) - \Phi(2) = 2 - 0.99865 - 0.97725 = 0.0241. \end{aligned}$$

Folglich sind 2.41% der Widerstände Ausschuss.

- b) Analog erhalten wir mit $Z := \frac{X-1000}{20}$ die Ausschusswahrscheinlichkeit gleich

$$\mathbf{P}(X > 1050 \vee X < 950) = 1 - \mathbf{P}(-2.5 \leq Z \leq 2.5) = 2 - 2\Phi(2.5) = 2 - 2 \cdot 0.99379 = 0.01242.$$

Somit wurde der Ausschuss mit 1.242% fast halbiert.

- c) Wir setzen wieder $Z := \frac{X-1000}{\sigma}$ mit unbekannter Standardabweichung σ an. Es muss

$$\mathbf{P}(990 \leq X \leq 1010) = \mathbf{P}\left(-\frac{10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 \stackrel{!}{\leq} 0.9$$

gelten. Das ist äquivalent zu $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \leq 0.95$, bzw. $\frac{10}{\sigma} \leq 1.65$. Somit darf die Standardabweichung höchstens $\sigma = 6.06$ sein.

Aufgabe 3

Die Abfüllmenge automatisch gefüllter Sprayflaschen sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit den bekannten Parametern $\mu = 150\text{cm}^3$ und $\sigma^2 = 3.5\text{cm}^6$. In der Gütekontrolle wird eine Flasche ausgesondert, wenn sie weniger als 146cm^3 enthält. Die Tagesproduktion an Sprayflaschen betrage 4000 Stück.

- Wie viele Sprayflaschen können durchschnittlich täglich zum Verkauf kommen?
- Auf welchen neuen Wert μ müsste der Abfüllautomat eingestellt werden, damit durchschnittlich nur 1% der Sprayflaschen bei der Gütekontrolle reklamiert werden?

Lösung:

- a) Wir wählen wieder die Normierung $Z = \frac{X-150}{3.5}$ und erhalten die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(X \geq 146) = \mathbf{P}\left(Z \geq -\frac{4}{3.5}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z < -\frac{8}{7}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{8}{7}\right) \approx \Phi(1.142857) \approx 0.87286.$$

Somit können von 4000 Sprayflaschen durchschnittlich $4000 \cdot 0.87286 \approx 3491.44$ Flaschen verkauft werden.

- b) Wir setzen wieder $Z = \frac{X-\mu}{3.5}$ an mit unbekanntem Mittelwert μ und betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sprayflasche reklamiert wird. Wir erhalten

$$\mathbf{P}(X < 146) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{146 - \mu}{3.5}\right) = \Phi\left(\frac{146 - \mu}{3.5}\right) \stackrel{!}{=} 0.01.$$

Dies kann weiter umgeformt werden (auch da $\mu > 146$ gelten sollte) zu

$$1 - \Phi\left(\frac{\mu - 146}{3.5}\right) = 0.01$$

bzw.

$$\Phi\left(\frac{\mu - 146}{3.5}\right) = 0.99.$$

Somit muss $\frac{\mu-146}{3.5} \approx 2.326350$ gelten, woraus $\mu \approx 154.142225$ folgt.

Aufgabe 4

Ein Verschleißteil mit exponentialverteilter Lebensdauer sei in einem Aggregat eingebaut und habe die Ausfallrate $\lambda = 5.2 \cdot 10^{-3}\text{h}^{-1}$.

- Wie viele solche Teile braucht man durchschnittlich in einem Jahr (365 Tage) ?
- Wie viele solche Teile muss man reservieren, damit sie mit 99%-iger Sicherheit für den Betrieb des Aggregates in einem Jahr ausreichen?
- Fragestellung wie in b), aber bei 50%-iger Sicherheit.

Lösung: Wir betrachten wir eine Folge unabhängiger Zufallsexperimente, welche exponentialverteilt mit gleicher, konstanter Rate sind. Für die Modellierung der Anzahl der Ausfälle gleicher Bauteile in einer gegebenen Zeit eignet sich eine poissonverteilte Zufallsvariable. Diese wird beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbf{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

mit Ausfallrate λ . Die Zeitdauer zwischen zwei zufälligen Ausfällen (-> Lebensdauer eines Bauteils) ist exponentialverteilt. Wir benötigen dafür die Ausfallrate, welche der durchschnittlichen Anzahl Ausfälle pro Zeiteinheit, hier ein Jahr, entspricht. Dafür rechnen wir die Rate wie folgt um:

$$\frac{5.2}{1000h} = \frac{124.8}{1000Tage} = \frac{45.552}{Jahr}.$$

- a) Die durchschnittliche Anzahl Ausfälle pro Jahr entspricht dem Erwartungswert der poissonverteilten Zufallsvariablen X . Wir wissen, dass

$$\mathbf{E}[X] = \lambda = 45.552.$$

Somit benötigt man durchschnittlich 46 Teile pro Jahr.

- b) Gesucht ist eine hinreichend große Anzahl Bauteile $n \in \mathbb{N}$, so dass es nach einem Jahr noch funktionstüchtige Bauteile gibt. Das bedeutet, es muss weniger als n Ausfälle geben. Wir wählen als Ansatz

$$\mathbf{P}(X < n) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \geq 0.99.$$

Dies gilt für $n \geq 63$.

- c) Wir wählen den gleichen Ansatz und passen die Wahrscheinlichkeit an:

$$\mathbf{P}(X < n) \geq 0.5.$$

Dies liefert uns $n \geq 46$.