Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Elena Klimova

Dresden, 18.01.2025

Probeklausur „Mathematik [I382 / I380]“

Name, Vorname	**Matrikelnummer**	**Unterschrift**

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie...

1. **sich gesundheitlich dazu in der Lage fühlen, an der Prüfung teilzunehmen,**
2. **insbesondere keine SARS-CoV-2-Symptome haben.**

Hinweise

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **90 Minuten**.
- Nutzen Sie ausschließlich DIN-A4 Blätter. Lösen Sie bitte **jede** Aufgabe auf einem **neuen** Blatt! Schreiben Sie auf **jedes** neue Blatt **Ihren Namen** und **Ihre Matrikelnummer**.
- Mit **Bleistift** oder in **rot** geschriebene Klausuren werden als **nicht bestanden** gewertet.
- Wenn nicht anders angegeben, sind die Lösungswege zu den Aufgaben **vollständig und nachvollziehbar** anzugeben und alle Aussagen zu begründen.
- Es gibt insgesamt 73 Punkte ✓, 7 davon sind Zusatzpunkte, d.h. **66 Punkte entsprechen 100%**. Um die Klausur zu bestehen, werden 66/2 Punkte benötigt.
- Es sind 2 handgeschriebene DIN-A4 Blätter als Exzerpt in der Prüfung erlaubt. Darüber ist es möglich, eine Formelsammlung (in gedruckter Form) in der Prüfung zu nutzen.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Σ**
Mögliche Punkte	**10**	**10**	**15**	**8**	**8**	**15**	**$66 + 7$**
Erreichte Punkte							

Note: ....

Viel Erfolg!

Aufgaben

Aufgabe 1 (10 Punkte) ***Wahr oder Falsch?***
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!
Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt ✓. Nicht oder falsch beantwortete Teilaufgaben ergeben null Punkte. Falls aus Ihrer Sicht keine der beiden Antwortoptionen zutreffend scheint, formulieren Sie Ihre Antwort unter Bezug auf die Frage Nr. auf separatem Blatt.

Frage Nr.	Aussage	wahr	falsch
1	Von einer mathematischen Aussage kann man immer entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist.		
2	Es seien die quadratischen Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gegeben. Dann gilt $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.		
3	Es sei S die Menge der Studierenden an der HTW Dresden, $C \subseteq S$ die Menge derjenigen, die Chemie studieren und $M \subseteq S$ die Menge derjenigen, die Medieninformatik studieren. Dann beschreibt $C \bigcup M$ die Menge derjenigen Studierenden der HTW Dresden, die Medieninformatik und Chemie studieren.		
4	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem kann eine leere Lösungsmenge besitzen.		
5	Für beliebige quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist die Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ immer lösbar.		
6	Für zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt die binomische Formel $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.		
7	Für die Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{jk})_{j,k=1,..,n}$ eines einfachen Graphen gilt $a_{jk} = a_{kj}$ für alle Indexwerte j und k.		
8	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt zwei verschiedene Eigenwerte.		
9	Für die Binomialkoeffizienten gilt $\binom{15}{5} = \binom{15}{10}$.		
10	Die Formel $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$ gilt und kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.		

Aufgabe 2 (10 Punkte) ***Lineare Algebra: Matrizen und Determinanten***
Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mu & 1 & \mu \\ 0 & 2-\mu & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) ✓✓ Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen **A**und **C**.

(b) ✓ Entscheiden Sie, ob die Matrix **A** invertierbar ist und berechnen Sie, falls möglich, das Inverse.

(c) ✓ Für welche $\mu \in \mathbb{R}$ ist die Matrix **C** invertierbar?

(d) ✓ Die Matrix D ergibt sich aus der Matrix C indem Sie für $\mu = 1$ einsetzen. Geben Sie die Matrix D an.

(e) ✓✓✓✓✓ Lösen Sie die Matrizengleichung $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{X} + 5\mathbf{E} = 0$, wobei die Matrizen $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ oben gegeben sind, **E** die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix eintsprechender Ordnung bezeichnen.

Aufgabe 3 (15 Punkte) ***Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme***
Es sei das von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & tx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & tx_2 & + & x_3 & = & t+1 \\ \hline \end{array}$$

gegeben.

(a) ✓✓✓✓✓ Analysisren Sie das LGS mithilfe vom Gauß-Algorithmus. Geben Sie dabei alle Elementarumformungen an.

(b) Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ hat das LGS...

(i) ✓ genau eine Lösung? (ii) ✓ unendlich viele Lösungen? (iii) ✓ keine Lösung?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und verwenden Sie dabei den Begriff Rang.

(c) ✓✓✓✓✓✓ Geben Sie für jeden der drei Fälle die Lösungsmenge an!

(d) ✓ Geben Sie eine vollständige Antwort an.

Aufgabe 4 (8 Punkte) ***Vollständige Induktion***

✓✓✓✓✓✓✓✓ Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte) ***Lineare Algebra: Eigenwerte und Eigenvektoren***

Es seien die von zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & b & -2 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

✓✓✓✓✓✓ Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass $\mathbf{v}$ Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist.

✓✓ Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ?

Aufgabe 6 (15 Punkte) ***Kombinatorik***

(a) ✓ Berechnen Sie mit dem Binomischen Lehrsatz die 15-te Summe im Pascalischen Dreieck:

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \ldots + \binom{15}{15} = ?$$

(b) Bernd lauscht außerhalb des Raumes einem Fest. Als alle anstoßen, zählt er die Anzahl der Kling mit und kommt auf 23.

(b1) ✓✓ Warum muss er sich verzählt haben?

(b2) ✓✓ Angenommen er hat zu wenig gezählt. Was ist dann die untere Grenze für die Anzahl der Leute, die an dem Fest teilnehmen?

(c) Sie haben die fünf Ziffern $1, 2, 2, 2, 4$ und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden. Die Zahlen denken Sie sich der Größe nach geordnet in einer Liste. Folglich ist die erste Zahl der Liste 12224 und die letzte Zahl der Liste 42221.

(c1) ✓✓ Wie viele Zahlen stehen in der Liste?

(c2) ✓✓ Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 2?

(c3) ✓✓ Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 4?

(c4) ✓✓ An welcher Stelle der Liste steht 14222?

(c5) ✓✓ Welche Zahl steht an der 27. Stelle?
