TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 10. Juni 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

7. Übung: Klassische Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 1

Bei einem Wurf mit zwei Würfeln werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: Die Augensumme ist größer als 7.

B: Genau eine der beiden Augenzahlen ist eine 5.

C: Es wird keine 1 gewürfelt.

a) Bestimmen Sie zunächst die Grundgesamtheit von Elementarereignissen Ω und überzeugen Sie sich davon, dass A, B, C Elemente der σ-Algebra sind. Definiere außerdem eine Zufallsvariable, mit der A beschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C), \mathrm{P}(A\cap B), \mathrm{P}(A\cap C), \mathrm{P}(B\cap C), \mathrm{P}(A\cup B), \mathrm{P}(A|B), \mathrm{P}(A|C), \mathrm{P}(C|A), \mathrm{P}(B|C)$.

c) Sind die Ereignisse A und B unabhängig bzw. disjunkt?

Lösung:

a) Die Grundgesamtheit Ω lautet hier:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\text{„Würfel 1 zeigt 1 und Würfel 2 zeigt 1“}, \dots, \text{„Würfel 1 zeigt 1 und Würfel 2 zeigt 6“},\\ &\dots\\ &\text{„Würfel 1 zeigt 6 und Würfel 2 zeigt 1“}, \dots, \text{„Würfel 1 zeigt 6 und Würfel 2 zeigt 6“}\},\end{aligned}$$

und mit geeigneter Abkürzung $\omega_{i,j} := (i, j) \mathrel{\widehat{=}}$ „Würfel 1 zeigt i und Würfel 2 zeigt j“ lässt sich dies kompakter schreiben als

$$\Omega = \{\omega_{i,j}\}_{i,j=1}^{6} = \{(1,1), \dots, (1,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}.$$

Die Ereignisse A, B, C lassen sich als Vereinigung der Elementarereignisse darstellen,

$$\begin{aligned}A &= \{(2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4),\\ &\quad (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}\\ B &= \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}\\ C &= \{(2,2), \dots, (2,6), (3,2), \dots, (3,6), \quad \dots \quad, (6,2), \dots, (6,6)\},\end{aligned}$$

und sind damit Elemente der σ-Algebra.

Die Zufallsvariable $X = \Omega \to \mathbb{R}$, definiert als $X(\omega_{i,j}) = i + j$, lässt uns das Ereignis A auch durch $A = \{\omega \in \Omega \colon X(w) > 7\}$ oder kurz $A = \{X > 7\}$ beschreiben.

b) Da man einen Wurf mit zwei Würfeln auch als zweimaliges Werfen eines Würfels “ohne Zurücklegen” betrachten kann, gibt es genau $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Wurfergebnisse. Man überlegt sich leicht, dass es genau $M(n) = 6 - |n - 7|$ Möglichkeiten gibt, um die Zahl $n \in [2, 12] \cap \mathrm{N}$ zu erhalten.

Im Folgenden kommen jeweils die Überlegungen und Rechnungen zu den gegebenen Ereignissen.

A Die Funktion M nimmt für Werte größer als 7 die Werte 1 bis 5 an (in umgekehrter Reihenfolge). Somit gilt mit Gaußscher Summenformel

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum_{i=1}^{5} i}{36} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6}{36} = \frac{5}{12}.$$

B Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Der erste Würfel kann eine 5 sein, dann muss der zweite Würfel von 5 verschieden sein. Ebenso kann der zweite Würfel die 5 sein und der erste Würfel muss einen anderen Wert annehmen. Somit ist

$$\mathrm{P}(B) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

C Beide Würfel müssen von 1 verschieden sein, für beide Würfel gibt es dafür 5 mögliche Ergebnisse.

$$\mathrm{P}(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

$A \cap B$ Bis auf Reihenfolge gibt es nur die Möglichkeit einer 5 kombiniert mit einer $3, 4$ oder 6 zu würfeln:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$A \cap C$ Da das “kleinste” 8er Ergebnis aus dem Paar $(2, 6)$ besteht, kann es keine 1 geben, wenn eine 8 oder mehr gewurfen wurde. Somit ist $A \cap C^c = \emptyset$ bzw. $A \in C$. Es folgt

$$\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A) = \frac{5}{12}.$$

$B \cap C$ Wir benötigen eine 5 und ein von 1 sowie 5 verschiedenes Ergebnis:

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

$A \cup B$ Wir addieren die Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse, müssen allerdings deren Schnitt abziehen. Dieser besteht aus Ergebnissen, die genau eine 5 haben und in der Summe mehr als 7 betragen, also $(5, 3), (5, 4)$ oder $(5, 6)$ (bis aus Reihenfolge). Wir erhalten

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{15 + 10 - 2 \cdot 3}{36} = \frac{19}{36}.$$

Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1/6}{10/36} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(A|C) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{5/12}{25/36} = \frac{3}{5},$$

$$\mathrm{P}(C|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{5/12}{5/12} = 1,$$

sowie

$$\mathrm{P}(B|C) = \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{2/9}{25/36} = \frac{8}{25}.$$

c) Die Ereignisse A und B sind wegen

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{18} \neq \frac{1}{6} = \mathrm{P}(A \cap B)$$

nicht unabhängig. Die Ereignisse sind auch nicht disjunkt, denn das Ergebnis $(5, 6)$ liefert eine Summer größer als 7 und hat genau eine 5.

Aufgabe 2

In einer Halle befinden sich vier unabhängig voneinander arbeitende Maschinen, die in einem bestimmten Zeitraum mit den Wahrscheinlichkeiten $0.9,\ 0.95,\ 0.8$ bzw. 0.85 nicht ausfallen.

Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Zeitraum

a) alle vier Maschinen arbeiten
b) keine Maschine arbeitet
c) genau eine Maschine arbeitet
d) genau zwei Maschinen arbeiten
e) genau drei Maschinen arbeiten
f) wenigstens eine Maschine arbeitet!

Lösung: Es bezeichne im Folgenden X die Zufallsvariable, welche angibt, wie viele Maschinen arbeiten.

a) Da die Maschinen unabhängig voneinander arbeiten, können wir deren Arbeitswahrscheinlichkeiten multiplizieren:

$$\mathrm{P}(X = 4) = 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.8 \cdot 0.85 = 0.5814.$$

b) Die Ausfallwahrscheinlichkeiten p_{aus} erhalten wir über die Beziehung $p_{\text{arb}} = 1 - p_{\text{aus}}$. Mit Unabhängigkeit folgt analog

$$\mathrm{P}(X = 0) = 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.15 = 0.00015.$$

c) Es muss genau eine Maschine arbeiten und die anderen drei ausfallen. Wir addieren die Wahrscheinlichkeiten der vier disjunkten Ereignisse, dass jeder der vier Maschinen einzeln ausfällt:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = 1) &= 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.85 + 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.8 \cdot 0.15 \\ &\quad + 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.2 \cdot 0.15 + 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.15 = 0.00565.\end{aligned}$$

d) Wir gehen analog vor, es gibt

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Möglichkeiten, dass von vier Maschinen genau zwei ausfallen:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = 2) &= 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.8 \cdot 0.85 + 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.2 \cdot 0.85 \\ &\quad + 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.8 \cdot 0.15 + 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.85 \\ &\quad + 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.8 \cdot 0.15 + 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.2 \cdot 0.15 = 0.06965.\end{aligned}$$

e) Analog zu b), hier gibt es vier Möglichkeiten für die Position der ausgefallenen Maschine:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = 3) &= 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.8 \cdot 0.85 + 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.8 \cdot 0.85 \\ &\quad + 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.2 \cdot 0.85 + 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.8 \cdot 0.15 = 0.34315.\end{aligned}$$

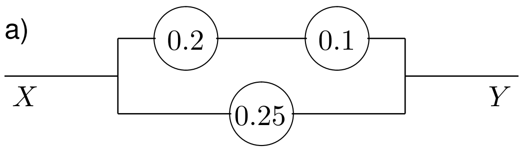
f) Das Ereignis einer existenten arbeitenden Maschine ist das Komplement des Ereignisses keiner arbeitenden Maschine, sprich dem Fall, in welchem alle Maschinen ausgefallen sind. Ergo gilt

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - 0.00015 = 0.99985.$$

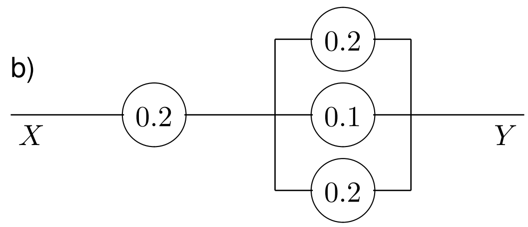
Aufgabe 3

Bei den Schaltungen a) und b) können die jeweiligen Bauelemente (in der Gesamtheit) unabhängig mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten ausfallen, wobei der Ausfall eines Bauelements die Unterbrechung des Stromes an der betreffenden Stelle zur Folge habe. Man gebe die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass jeweils zwischen den Punkten X und Y Strom fließen kann!

a)



b)



Lösung:

a) Wir bezeichnen zunächst die Ereignisse, dass die einzelnen Bauteile intakt sind. Dabei seien die oberen, in Reihe geschalteten Bauteile A bzw. B, und das parallel dazu verbaute Teil C, d.h. $\mathrm{P}(A) = 0.8$, $\mathrm{P}(B) = 0.9$ sowie $\mathrm{P}(C) = 0.75$. Analog zu Aufgabe 6 des letzten Übungsblattes muss für intakten Stromfluss mindestens ein intakter Weg existieren, sprich beide oberen Bauteile oder das untere muss intakt sein. Somit sind wir am Ereignis $(A \cap B) \cup C$ interessiert. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{P}((A \cap B) \cup C) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{Unabh.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\,(1 - \mathrm{P}(C)) + \mathrm{P}(C) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.25 + 0.75 = 0.18 + 0.75 = 0.93.\end{aligned}$$

Alternativ können wir uns auch überlegen, dass "Stromfluss in mindestens einer der parallelen Wege" das Komplementärereignis von "kein Stromfluss auf beiden Wegen" ist. Die Wahrscheinlichkeit für Ausfall in der oberen Leitung erhalten wir über das Komlementärereignis "beide Bauelemente intakt" als $1 - 0.8 \cdot 0.9 = 0.28$. Somit liefert uns die Rechnung $1 - 0.28 \cdot 0.25 = 0.93$ das gleiche Ergebnis.

b) Analog interessieren wir uns für das Ereignis $A \cap (B \cup C \cup D)$, wobei A für ein intaktes Bauteil und B, C, D für die drei intakten parallel geschaltenen Teile steht. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Komplementärereignis:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap (B \cup C \cup D)) &= 1 - \mathrm{P}([A \cap (B \cup C \cup D)]^c) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cup (B^c \cap C^c \cap D^c)) \\ &= 1 - \mathrm{P}(A^c) - \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C^c)\mathrm{P}(D^c) + \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C^c)\mathrm{P}(D^c) = 0.7968.\end{aligned}$$

Alternativ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit der parallelen Schaltung wieder gleich $0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.004$ und somit die Wahrscheinlichkeit für Stromfluss der gesamten Schaltung $0.8 \cdot 0.996 = 0.7968$.

Aufgabe 4

Ein Gerät besteht aus 100 unabhängigen Baugruppen gleicher Funktionstüchtigkeit. Z_k sei das Ereignis, dass die k-te Gruppe zuverlässig arbeitet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät zuverlässig arbeitet bei $\mathrm{P}(Z_k) = 99\%$?

b) Wie groß muss $\mathrm{P}(Z_k)$ sein, damit $\mathrm{P}(Z_{Geraet}) = 90\%$ ist?

Lösung:

a) Aus der Unabhängigkeit folgt

$$\mathrm{P}(\cap_{k=1}^{100} Z_k) = \prod_{k=1}^{100} \mathrm{P}(Z_k) = \mathrm{P}(Z_1)^{100} = 0.99^{100} = 0.36603.$$

b) Die Beziehung $\mathrm{P}(Z_k)^{100} = 0.9$ ist äquivalent zu $\mathrm{P}(Z_k) = 0.9^{\frac{1}{100}} \approx 0.998947$.

Aufgabe 5

Von einem Krebstest sind gegeben:
Ereignisse: T: Testergebnis positiv, d.h. Verdacht auf Krebs
K: Testperson krebskrank
Wahrscheinlichkeits-Werte: $\mathrm{P}(T|K) = \mathrm{P}(T^c|K^c) = 0.95$, $\mathrm{P}(K) = \frac{1}{200}$
Berechnen Sie $\mathrm{P}(T)$ und $\mathrm{P}(K|T)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse!

Lösung: Mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(T|K)\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(T|K^c)\mathrm{P}(K^c) = \mathrm{P}(T|K)\mathrm{P}(K) + (1 - \mathrm{P}(T^c|K^c)(1 - \mathrm{P}(K)) \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{20} \cdot \frac{199}{200} = \frac{19 + 199}{4000} = \frac{218}{4000} = \frac{109}{2000}. \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Bayes folgt damit

$$\mathrm{P}(K|T) = \frac{\mathrm{P}(T|K)\mathrm{P}(K)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{19/20 \cdot 1/200}{109/2000} = \frac{19}{218}.$$

Somit kann man von einem positiven Test keinesfalls darauf schließen, tatsächlich Krebs zu haben. Es ist jedoch ein recht guter Indikator, den es weiter zu untersuchen gilt.