TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 16. Juni 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

8. Übung: Diskrete Verteilungen

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X nehme die Werte 0, 1, 2, 3, 4 mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

X	0	1	2	3	4
Wkt.	0.1	0.25	0.5	0.05	0.1

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X an.

b) Bestimmen Sie **E** $[X]$ und **Var**$[X]$!

Lösung:

a) Die Verteilungsfunktion einer rellen Zufallsvariablen X ist definiert als $F_X : \mathbb{R} \to [0,1], F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$. Somit ist

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0, \\ 0.1 & : 0 \leq t < 1, \\ 0.35 & : 1 \leq t < 2, \\ 0.85 & : 2 \leq t < 3, \\ 0.9 & : 3 \leq t < 4, \\ 1 & : t \geq 4. \end{cases}$$

b) Der Erwartungswert ist definiert als $\mathrm{E}(X) = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathrm{P}$. Da X eine diskrete Zufallsvariablen ist, entspricht dies

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n \in \mathrm{N}_0} n\mathrm{P}(X = n) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.1 = 1.8.$$

Analog erhalten wir für die Varianz

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 &= \sum_{n \in \mathrm{N}_0} (n - 1.8)^2 \mathrm{P}(X = n) \\ &= (-1.8)^2 \cdot 0.1 + (-0.8)^2 \cdot 0.25 + 0.2^2 \cdot 0.5 + 1.2^2 \cdot 0.05 + 2.2^2 \cdot 0.1 = 1.06. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X habe eine diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte der Form

$$\boldsymbol{P}(X = x_k) = \begin{cases} c, & \text{wenn} \quad x_k = 0 \\ 2c, & \text{wenn} \quad x_k = 1 \\ 3c, & \text{wenn} \quad x_k = 2 \\ 0 & \qquad\quad \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei c eine gewisse Konstante ist. Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c.

Lösung:

Wenn p eine Wahrscheinlichkeitsfunktion sein soll, muss die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich 1 sein, d.h.

$$p(\mathbb{R}) = p(0) + p(1) + p(2) + \underbrace{p(\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\})}_{=0} = c + 2c + 3c = 6c \overset{!}{=} 1.$$

Somit muss $c = \frac{1}{6}$ gelten.

Aufgabe 3

Auf ein Ziel werden unabhängig voneinander 20 Schüsse abgegeben. Jeder einzelne Schuss trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit 0.8.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau 4 Treffer erzielt werden,

b) wenigstens ein Treffer erzielt wird,

c) höchstens 6 Treffer erzielt werden.

Mit welcher Verteilung ist zu arbeiten? Man gebe den Erwartungswert der entsprechenden Zufallsvariablen an!

Lösung:

Jeder einzelne Schuss hat genau zwei Ausgänge: Erfolg mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ und Misserfolg mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0.2$. Somit ist jeder der Schüsse Bernoulli-verteilt. Hier geht es um eine Folge von 20 unabhängigen, identischen Bernoulli-Zufallsexperimenten, weshalb die Binomialverteilung anzuwenden ist. Mit Versuchsanzahl $n = 20$ erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= np = 20 \cdot 0.8 = 16, \\ \mathrm{V}(X) &= npq = 20 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 3.2. \end{aligned}$$

Weiter kennen wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

natürlich nur für ganzzahliges $k \in [0, n] \cap \mathbb{Z}$. Damit können wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ermitteln:

a) Die Wahrscheinlichkeit für genau 4 Treffer erhalten wir direkt für $k = 4$:

$$\mathrm{P}(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^{16} \approx 1.30057 \cdot 10^{-8}.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit von mindestens einem Treffer bestimmen wir über das Komplementärereignis, welches keinem Treffer bzw. 20 Fehlschüssen entspricht.

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - 0.2^{20} \approx 1.$$

c) Für die Wahrscheinlichkeit von höchstens 6 Treffern sind die Wahrscheinlichkeiten aller $k \leq 6$ zu addieren:

$$\mathrm{P}(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} p(k) = \sum_{k=0}^{6} \binom{20}{k} 0.8^k 0.2^{20-k} \approx 1.845 \cdot 10^{-6}.$$

Aufgabe 4

In einer Leistungskontrolle werden 10 Fragen gestellt mit je 3 Auswahlantworten A, B, C, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch reines Tippen weniger als 4 Richtige zu erhalten?

Lösung:

Wir benutzen wieder Binomialverteilung: Es gibt 10 voneinander unabhängige Fragen, ergo $n = 10$. In jeder Fragerunde gibt es 3 Antworten, davon 1 richtig und 2 falsch. Die Erfolgswahrscheinlichkeit in jeder Runde ist somit $p = \frac{1}{2}$ und die Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = \frac{2}{3}$. Wir erhalten

$$\mathrm{P}(X < 4) = \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{3} \frac{10!}{k!(10-k)!} \frac{2^{10-k}}{3^{10}}$$
$$\approx 0.0173 + 0.0867 + 0.1951 + 0.2601 \approx 0.5593.$$

Aufgabe 5

Die Anzahl der Ausfälle eines Automaten sei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable, wobei in 10 000 Betriebsstunden im Mittel 10 Ausfälle beobachtet werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Automat in 100 Betriebsstunden nicht störungsfrei arbeitet.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer poissonverteilten Zufallsvariable ist $p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Hierbei ist λ die Intensität bzw. die durchschnittliche Anzahl Ausfälle pro Zeitintervall. Wir wissen, dass es innerhalb von 10.000 Stunden 10 Ausfälle passieren, das entspricht durchschnittlich 0.1 Ausfällen in 100 Stunden.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Automat nicht störungsfrei arbeiter, also es mindestens einen Ausfall gibt. Wir wählen wieder den Weg über das Komplementärereignis, welches Null Störungen enspricht:

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - e^{-0.1} \frac{0.1^0}{0!} = 1 - e^{-0.1} \approx 1 - 0.904837418 \approx 0.09516258196.$$

Aufgabe 6

Die Anzahl der belegten Speicherplätze für einen Artikel in einem Lager ist näherungsweise Poisson-verteilt mit $\lambda = r \cdot t$, wobei $r = 0.05h^{-1}$ (mittlere Ankunftsrate) und $t = 160h$ (mittlere Lagerzeit).

a) Wie viele Speicherplätze sind durchschnittlich belegt?

b) Wie viele Speicherplätze muss das Lager besitzen, damit mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit alle ankommenden Bauteile (z.B. in Palettenform) gespeichert werden können?

Lösung:

a) Die Intensität ergibt sich zunächst zu

$$\lambda = r \cdot t = 0.05h^{-1} \cdot 160h = \frac{160 \cdot 5}{100} = 8.$$

Die durchschnittliche Speicherplatzbelegung entspricht dem Erwartungswert und ist gleich $\lambda = 8$.

b) Gesucht ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathrm{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-8} \frac{8^k}{k!} \geq 0.95.$$

Die gesuchte Anzahl ist $n = 13$, denn

$$\mathrm{P}(X \leq 12) \approx 0.936 < 0.95 < 0.966 \approx \mathrm{P}(X \leq 13).$$